退化过程的统计建模：理论与实践

汤银才

华东师范大学统计学院

徐安察，庄亮亮

2025-11-06

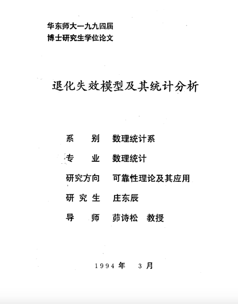
提纲

两个重要的期刊

- 《应用概率统计》
  - 1985 年创刊
  - 被 CSCD，北大核心等收录
  - 数学科技期刊分级目录 (T3)
  - 现任主编：陈松蹊院士
- 《统计理论及其应用 (英)》
  - 国际/国内创刊:2017 年/2021
  - 19 年入选《中国科技期刊卓越行动计划》高起点新刊项目
  - 收录：Scopus(2019.5)，CSCD(2022.4)，DOAJ(2022.9)，ESCI(2022.11)，JCR Q2(2025.6)，数学会 T3 系列，中国院分区 (Q4)
  - 现任主编：邵军，汤银才

早期高可靠产品的研究

- 加速寿命试验，Nelson (1990)；茆诗松, 王玲玲 (1997).
- 无失效数据的可靠性分析：Martz & Waller (1979)；茆诗松，罗朝斌 (1989)；张占忠，杨振海 (1989)；韩明 (1999, 专著)。
- 退化路径模型：Chow & Shao (1991)；Lu & Meeker (1993)；Meeker & Escobar (1993)；庄东辰, 茆诗松 (1994, 2013)；Meeker & Escobar (1998, 专著).

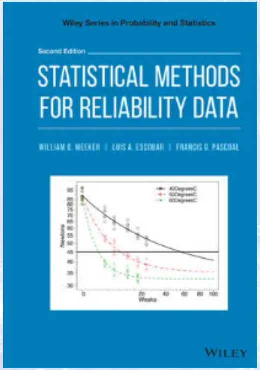

华东师大一九九四届
博士研究生学位论文

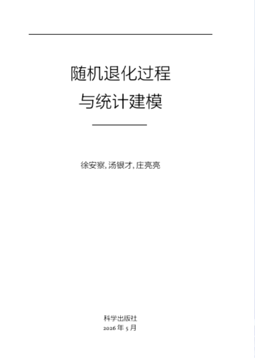
退化失效模型及其统计分析

系　　别　数理统计系
专　　业　数理统计
研究方向　可靠性理论及其应用
研 究 生　庄东辰
导　　师　茆诗松　教授

1994 年　3 月

近期两个工作：译著与专著，2026 年出版





我的几个学生：

- 徐安察, 浙江工商
- 管　强, 三明学院
- 王平平, 南经财经
- 周世荣, 温州大学
- 王昱栋, NUS, Upenn
- 庄亮亮, 南京理工

提纲

(加速) 试验的类型

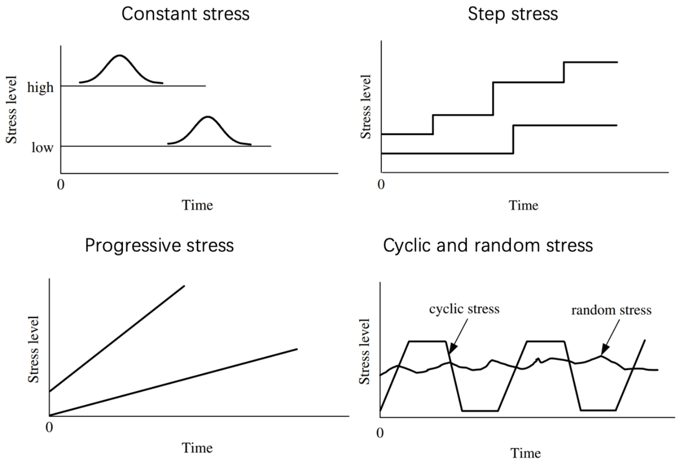


图 1.1: 试验的类型.

通常的寿命数据

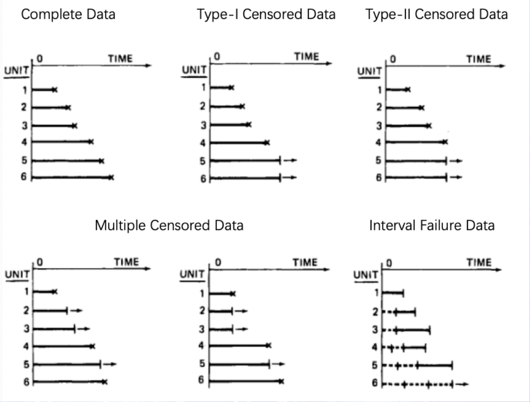
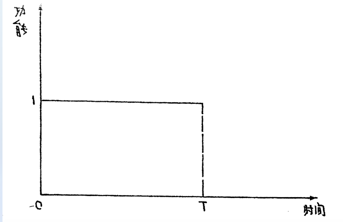
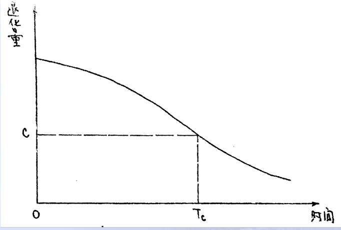


图 1.2: 截尾类型：事件图.

☞ 参见：茆诗松，汤银才，《可靠性统计》，高等教育出版社, 2008

失效的两种判定





- **突发型失效**: 从 0 到 T，产品功能处于 1 状态，而在 T 时刻突发性地转到 0 状态 (功能完全丧失)，即产品失效。T 即产品的寿命。
- **退化型失效**: 在 $[0, T_c]$, 产品的退化量高于失效标准 ω，即产品处于正常工作状态，而在 (T_c, ∞)，产品的退化量低于 (高于) 失效标准 ω，判定为产品失效 (软失效)。T_c 为产品的寿命。
- 退化型失效的特点: 产品在失效之前功能就在不断下降，而失效之后功能并不完全丧失，且失效与否是相对于失效标准而言的。

为何要做（加速）退化试验?

- 随着高科技的发展，许多产品设计要求具有很高的可靠度，即使采用**加速寿命试验**，也难以收集这些产品的失效数据.
- 退化数据为获取高可靠产品的可靠性信息提供了有用的资源。例如：
  - LED 阵列的光输出衰减
  - 光伏阵列的功率输出下降
  - 管道的腐蚀
  - 风力涡轮机中磨损轴承的振动
  - 汽车漆面的光泽和颜色损失
  - 饮料的菌落总数/大肠菌群的增加
  - 过度劳累会使人处于亚健康状态
- **加速退化试验** (ADT)有助于更快地揭示高可靠产品的寿命相关信息.
  - 恒加退化试验 (CSADT)
  - 步加退化试验 (SSADT)

完整的退化试验

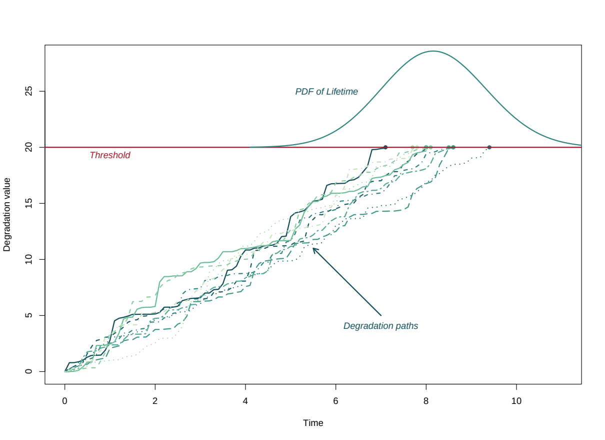


图 1.3: 完全退化试验与寿命分布

定时截尾退化试验

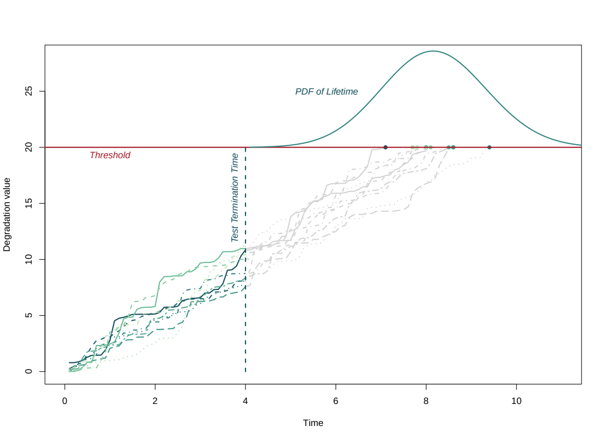


图 1.4: 定时截尾退化试验示意图

退化轨道与寿命

- $Y(t)$: 性能退化特征量 (PC) 的退化过程 (DP)
- ω: 失效阈值，T: 寿命:

$$T = \begin{cases} \inf\{t : Y(t) \geq \omega\}, & \text{递增 DP} \\ \sup\{t : Y(t) \leq \omega\}, & \text{递减 DP} \end{cases}$$

退化曲线的三种典型形态

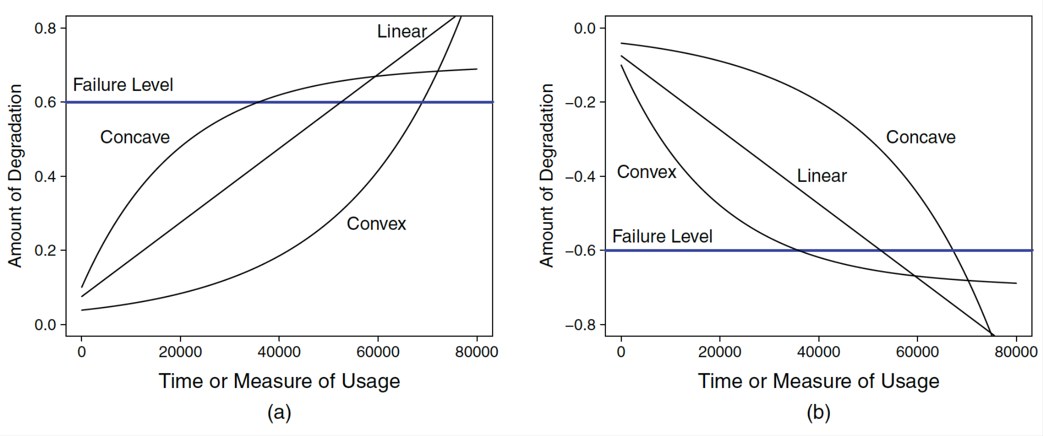


图 1.5: 退化曲线的三种典型形态

退化分布

$$F_Y(\omega \mid t) = P\left(Y(t) < \omega \mid t\right)$$

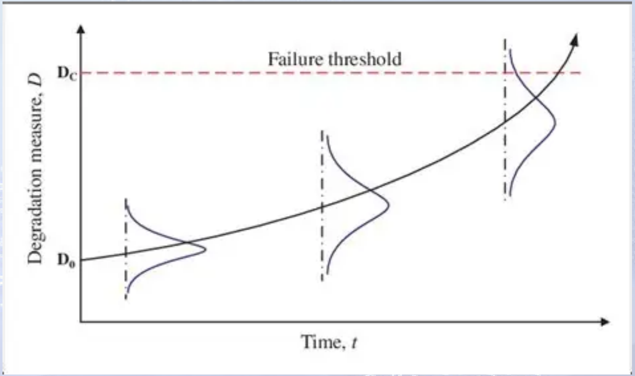


图 1.6: 递增退化过程与退化分布

寿命分布

$$F_T(t \mid \omega) = P(T < t \mid \omega)$$

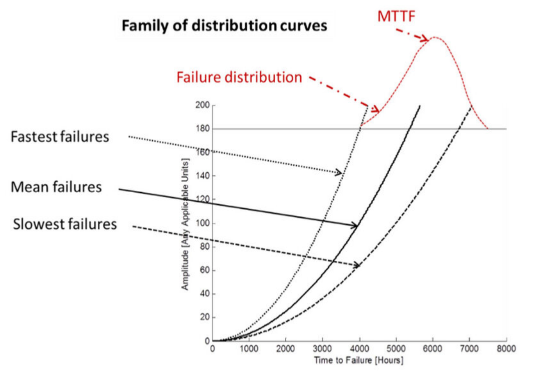


图 1.7: 失效分布

退化分布与寿命分布之间的关系

$$F_T(t \mid \omega) = \begin{cases} R_Y(\omega \mid t), & \text{递增 DP} \\ F_Y(\omega \mid t), & \text{递减 DP} \end{cases}$$

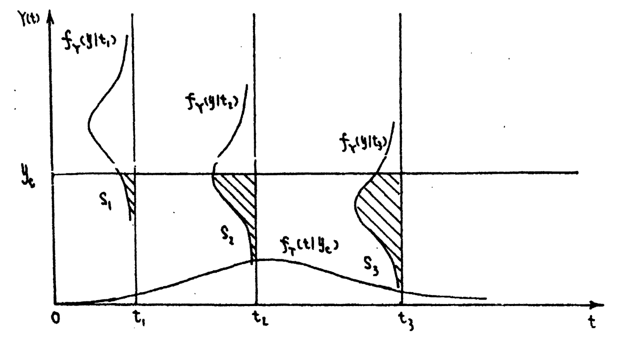


图 1.8: 退化分布与寿命分布之间的关系

示例 1：递增线性退化数据

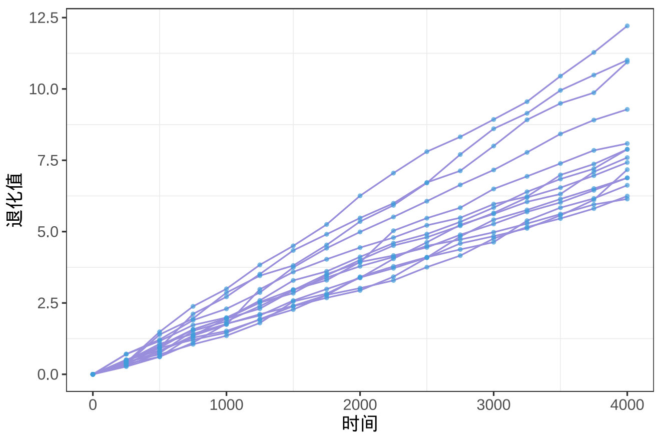


图 1.9: 激光工作电流的退化路径

示例 2：递增非线性退化数据

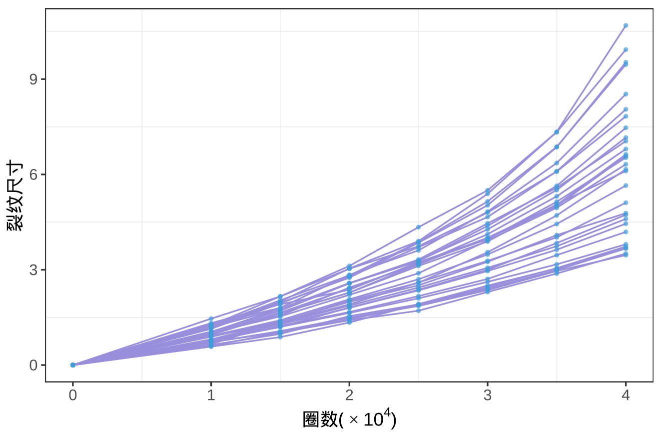


图 1.10: 铝合金裂纹退化数据

示例 3：递减退化数据

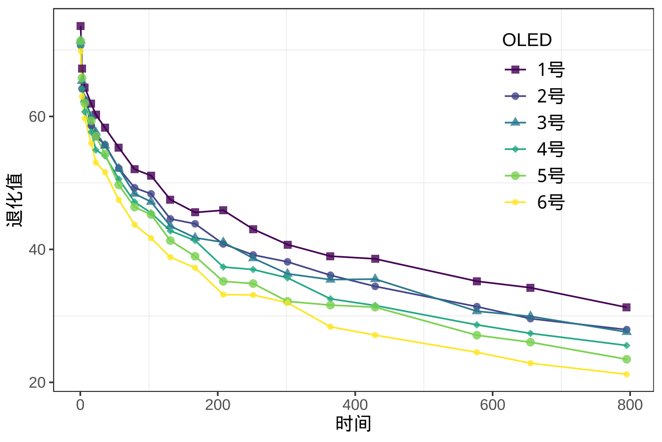


图 1.11: 6 个 OLED 的退化数据

示例 4: 加速退化试验数据

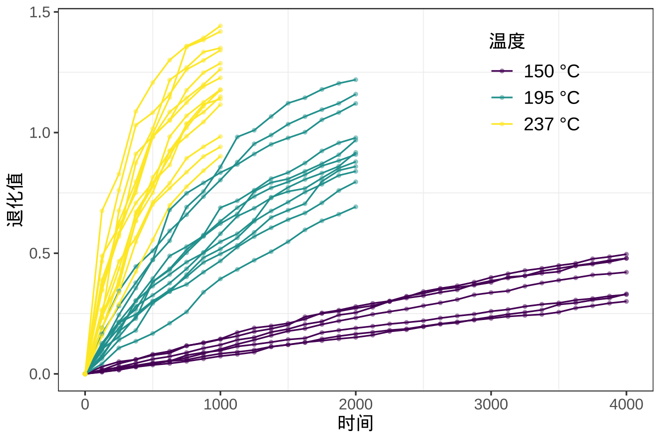


图 1.12: 3 组锂电池的容量退化数据

示例 5：有变点的退化数据

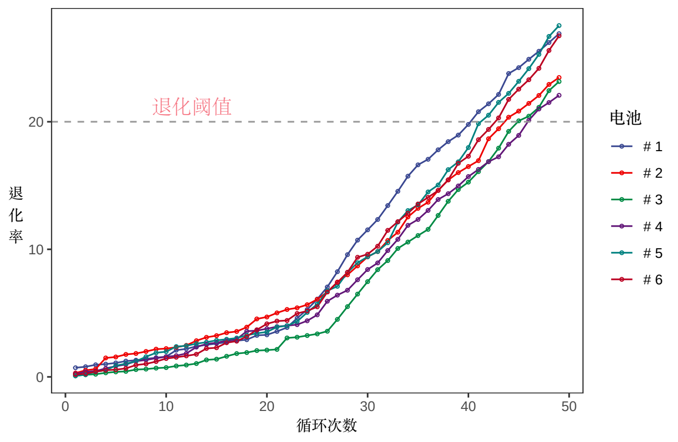


图 1.13: 6 个锂电池的容量退化数据

☞ 不能单独 (独立) 分析?

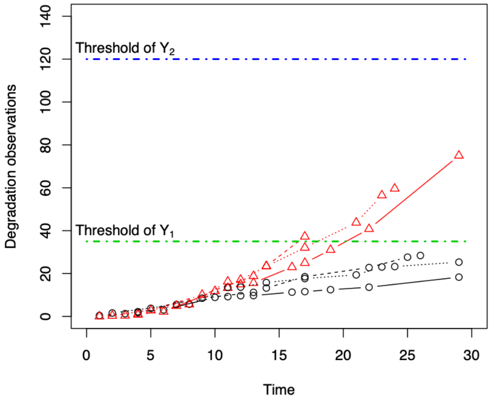


图 1.14: 重型机床的二个 PC 退化数据.

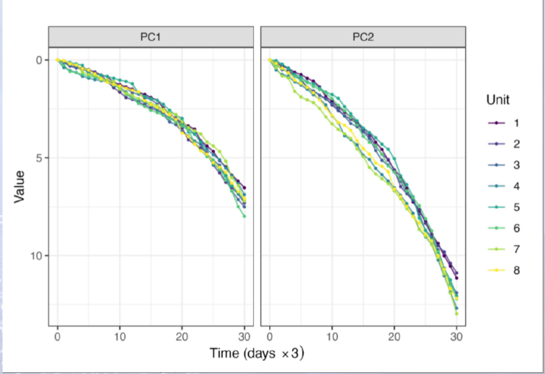


图 1.15: 永磁制动器二个 PC 退化数据.

关注的问题

- 退化形态/模型的确定。在此仅考虑递增的退化模型
- 异质性参数模型
- 加速模型
- 统计推断:
  1. 参数估计
  2. 寿命 T 的分布
  3. MTBF
  4. RUL: 剩余寿命分布
  5. 维修/替换策略
- 数据驱动的 ML/DL 建模: 从环境变量中提取与寿命相关的重要特征
- 计算加速: INLA, VB, ABC

提纲

两类退化模型

1. 一般路径模型 (general path model) (Lu & Meeker, 1993; Hong 等, 2015)

$$Y(t) = D(t|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{b}) + \epsilon.$$

2. 随机过程模型 (stochastic model)

$$Y(t) = X(t) + \epsilon.$$

- 持续的热点：google scholar 显示有几百万篇文章，2025 年 1 万多篇的论文.
- 随机退化过程模型包括维纳过程 (Liao and Tseng, 2006), 伽马过程 (Park & Padgett, 2005), 逆高斯过程 (Wang & Xu, 2010), 指数扩散过程 (Zhou & Xu, 2019), Ornstein–Uhlenbeck 过程, 等.
- 综述论文：Ye & Xie (2015), Zhang 等 (2018).

提纲

线性维纳过程

标准维纳过程

1. $B(0) = 0$;
2. $B(t)$ 有平稳独立增量;
3. 对任意 $t, s \geqslant 0$, $B(t+s) - B(s) \sim N(0, t^2)$;
4. $B(t)$ 关于 t 是连续函数,

带时间漂移的线性维纳过程

$$Y(t) = \beta t + \sigma B(t), \tag{2.1}$$

其中参数 β 和 σ 分别为漂移参数和扩散参数.

- ☞ 退化增量的分布: $\Delta Y(t) = Y(t+\Delta t) - Y(t) \sim N(\beta \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$;
- ☞ 寿命的分布: $T \sim IG(\omega/\beta, \omega^2/\sigma^2)$; $E(T) = \omega/\beta$.

带时间漂移的非线性维纳过程 (Whitmore, 1995)

$$Y(t) = \beta\Lambda(t) + \sigma B(\Lambda(t)), \tag{2.2}$$

其中 $\Lambda(t)$ 为时间尺度函数, 用于描述性能退化可能随时间呈现非线性趋势, 例如 $\Lambda(t) = t^{\alpha}$ 能够灵活地描述线性、凹形或凸形的退化路径.

- 退化增量的分布:

$$\Delta Y(t) \sim N(\beta\Delta\Lambda(t), \sigma^2\Delta\Lambda(t)),$$

其中 $\Delta\Lambda(t) = \Lambda(t+\Delta(t)) - \Lambda(t)$.

广义维纳过程

$$M_0: Y(t) = \beta\Lambda(t) + \sigma(\beta)B(\tau(t)), \tag{2.3}$$

其中 $\Lambda(t) = \Lambda(t; r)$ 和 $\tau(t) = \tau(t; b)$ 为两个单调递增的时间变换函数, $\Lambda(0) = \tau(0) = 0$, $B(\cdot)$ 为标准维纳过程 (布朗运动).

☞ 退化增量的分布:

$$\Delta Y(t) \sim N(\beta\Delta\Lambda(t), \sigma^2(\beta)\Delta\tau(t)),$$

其中 $\Delta\Lambda(t) = \Lambda(t + \Delta(t)) - \Lambda(t)$, $\Delta\tau(t) = \tau(t + \Delta(t)) - \tau(t)$.

维纳过程汇总

1. 传统维纳退化模型 (TWM) (当 $\sigma(\beta)=\sigma$ 时)
   - $\Lambda(t)=\tau(t)=t$: 线性漂移的退化过程
   - $\Lambda(t)=\tau(t)=\Lambda(t;r)$: 非线性漂移的退化过程
   - $\Lambda(t)=\Lambda(t;r), \tau(t)=t$: 非线性 TWM 的简化形式
2. 广义维纳退化模型-类型 I (NWM-I) (当 $\sigma(\beta)=\beta\kappa$ 时)
   - $\Lambda(t)=\tau(t)=\Lambda(t;r)$: 非线性 NWM-I (Ye, Chen 等, 2015)
   - $\Lambda(t)=\Lambda(t;r), \tau(t)=t$: NWM-I (Wang 等, 2019)
3. 广义维纳退化模型-类型 II (NWM-II) (当 $\sigma(\beta)=\beta^{1/2}\kappa$ 时)
   - $\Lambda(t)=\tau(t)=\Lambda(t;r)$: 非线性 NWM-II (Zhai, Chen 等, 2018)
   - $\Lambda(t)=\Lambda(t;r), \tau(t)=t$: NWM-II
4. NWM-II 的优点:
   - 具有随时间变化的均值-方差比，退化率与波动率相依
   - 数学性质更好

- 模型的两部分:
  1. 退化增量 $\Delta Y(t)$ 的分布 (似然函数)
  2. 异质性参数及其分布, 例如 $\beta_i \sim \mathrm{IG}(a,b)$
- 两大主流方法:
  1. 基于 EM 算法的极大似然估计，其中 β_i 视为隐变量 (数据扩充)
  2. 基于 MCMC 的分层贝叶斯估计，其中 β_i 视为一层先验，对于其中的超参数及模型中的其他参数再给出一层先验。
- 算法依赖于:
  1. EM 算法或 MCMC 算法参数初始值的确定
  2. 模型选择: $\Lambda(t), \tau(t)$ 的确定

参见徐安察，汤银才，庄亮亮 (2026, 第二章) 及相关参考文献.

提纲

(齐次) 伽马退化过程

$\{Y(t), t \geq 0\}$ 满足以下性质:

1. $Y(0) = 0$;
2. $\{Y(t), t \geq 0\}$ 具有平稳和独立增量;
3. 退化增量的分布: $\Delta Y_t = Y(t+s) - Y(s) \sim Ga(\alpha t, \beta)$

- 寿命分布:

$$T \sim F_T(t \mid \alpha, \beta) = P(T < t) = P(Y(t) > \omega) = \frac{\Psi(\beta\omega, \alpha t)}{\Gamma(\alpha t)}, \tag{2.4}$$

其中 $\Psi(k, \alpha)$ 是上不完全伽马函数.

- 近似寿命分布 (Park & Padgett, 2005): $T \sim BS(\alpha^*, \beta^*)$, $\text{MTTF} = \beta^*(1 + \alpha^{*2}/2)$,

$$F_T(t \mid \alpha, \beta) = \Phi\left(\frac{1}{\alpha^*}\left[\sqrt{\frac{t}{\beta^*}} - \sqrt{\frac{\beta^*}{t}}\right]\right), \text{ 其中 } \alpha^* = \sqrt{\frac{1}{\beta\omega}}, \beta^* = \frac{\beta\omega}{\alpha}. \tag{2.5}$$

统计推断: 贝叶斯方法

- 异质性参数: β
- 数据: $y_{ij} = Y_{ij} - Y_{ij-1} \sim Ga(\alpha t_j, \beta_i)$ $(Y_{i0} = 0) \Rightarrow$ 似然函数 $L(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n)$
- $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n$ 的共轭先验 (在 $t_{i,j} = T_{i,j} - T_{i,j-1} = l$ 下)

$$\pi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) = C \frac{(\bar{\beta}_g \omega)^{\delta_1 l \alpha}}{[\Gamma(l\alpha)]^{\delta_1}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \delta_2 \lambda_i \beta_i\right\}, \qquad (2.6)$$

其中 C 是正则化常数, δ_1, δ_2, ω 和 λ_i 是非负超参数.

- 给定 α 时, β_i 的条件先验分布为 $Ga(1 + \delta_1 l\alpha/n, \delta_2\lambda_i)$, α 的边际分布近似为伽马分布. 因此, $\pi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ 为近似伽马-多元伽马分布.
- 由共轭性, $\pi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ 的后验分布也近似为伽马-多元伽马分布.
- 更一般情形及详细过程, 见徐安察, 汤银才, 庄亮亮 (2026, 第 3.2 节).

RUL 预测

- 定义: 假设在时间 t_m 监测到第 i 个产品的退化轨迹 $\{Y_{i1},\ldots,Y_{im}\}$ 均满足 $Y_{ij}<\omega$ (其中 ω 为失效阈值) , 则其在时间 t_m 的 RUL 定义为

$$Z_{it_m}=\inf\{z: Y_i(z+t_m)>\omega|Y_{ij}<\omega, j=1,\ldots,m\}.$$

- 分布函数为 Z_{it_m} 的 CDF 为

$$F_{Z_{it_m}}(z\mid\alpha,\beta_i)=\frac{\Psi(\beta(\omega-Y_{im}),\alpha z)}{\Gamma(\alpha z)}.$$

- 近似 RUL 分布 (Park & Padgett, 2005): $Z_{it_m}\sim BS(\alpha^*_{im},\beta^*_{im})$, 其中

$$\alpha^*_{im}=\sqrt{\frac{1}{\beta_i(\omega-Y_{im})}},\quad \beta^*_{im}=\frac{\beta_i(\omega-Y_{im})}{\alpha}.$$

重参化伽马退化过程

- 定义: $\{Y(t), t \geq 0\}$ 满足
  1. $Y(0)=0$;
  2. $\{Y(t), t \geq 0\}$ 具有平稳和独立增量;
  3. 退化增量的分布: $\Delta Y_t = Y(t+s) - Y(s) \sim Ga(\alpha t, \eta/\alpha)$
- $\mathrm{E}(Y(t)) = \eta t$, $\mathrm{Var}(Y(t)) = \eta^2 t/\alpha$, $\mathrm{CV} = 1/\sqrt{\alpha t}$
- 异质性参数: $\eta \sim LN(\mu, \sigma^2)$
- 统计推断: 变分贝叶斯 (周世荣等, IEEE Tr. R, 2023). 使用易处理的代理分布来近似复杂的 EM 算法或贝叶斯后验计算中低效的计算.
- 相比经典伽马退化过程模型的好处
  - 参数解释性更好: 参数 η 表示平均退化速率 (或斜率), 而参数 α 则量化总体样本退化过程的波动程度.
  - 便于 VB 的实现

提纲

逆高斯退化过程

- 定义: $\{Y(t), t \geq 0\}$ 满足
  1. $Y(0) = 0$;
  2. $\{Y(t), t \geq 0\}$ 具有平稳和独立增量;
  3. 退化增量的分布: $\Delta Y_t = Y(t+s) - Y(s) \sim IG(\alpha t, \lambda t^2)$
- $\mathrm{E}[Y(t)] = \alpha t$, $\mathrm{Var}[Y(t)] = \alpha^3 t/\lambda$.
- 异质性参数: $v = 1/\alpha$
- 参数解释性更好:
  - α 表示退化速率, 直接反映系统性能随时间推移的衰减速度
  - λ 作为扩散系数, 衡量退化过程的波动程度, 表征退化路径的随机性和不确定性.
- 寿命分布 (其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的 CDF)

$$F(t) = \Phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{\omega}}\left(t - \frac{\omega}{\alpha}\right)\right] - \exp\left(\frac{2\lambda t}{\alpha}\right)\Phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda}{\omega}}\left(\frac{\omega}{\alpha} + t\right)\right], \tag{2.7}$$

子总体异质性下的非线性逆高斯过程

- 退化增量的分布:

$$\Delta Y_t = Y(t+s) - Y(s) \sim IG(\Lambda(t,\beta)/v, \lambda\Lambda(t,\beta)^2),$$

其中 $\Lambda(t,\beta)$ 为时间尺度变换函数.

- 具有子总体异质性的 IG 退化模型为

$$\begin{aligned} Y(t) \mid \nu &\sim \mathrm{IG}(\Lambda(t,\beta)/\nu, \lambda\Lambda(t,\beta)^2), \\ \nu &\sim \sum_{k=1}^{K} p_k N(\mu_k, \sigma_k^2/\lambda), \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 p_k 为第 k 个子总体的比例, $N(\cdot)$ 表示高斯分布, K 为子群体总数.

- 统计推断: EM 算法. 参见徐安察, 汤银才, 庄亮亮 (2026, 第 4.2 节)

提纲

指数分散退化过程

- 定义: $\{Y(t), t \geq 0\}$ 满足
  1. $Y(0) = 0$;
  2. $\{Y(t), t \geq 0\}$ 具有独立增量性;
  3. $\Delta Y_t = Y(t+s) - Y(s) \sim ED(\mu\Lambda(t;\alpha), \lambda)$, 其密度函数为

$$f(\Delta y; \theta, \lambda, \alpha) = c(\Delta y \mid \Delta\Lambda(t;\alpha), \lambda) \exp\left\{\lambda[\Delta y\theta - \Delta\Lambda(t;\alpha)\kappa(\theta)]\right\}, \qquad (2.9)$$

  其中 $\Lambda(\cdot)$ 是时间 t 的单调递增函数, α 为未知参数, $c(\cdot)$ 是正则化常数; $\kappa(\cdot)$ 是累积函数 (cumulant function), 其导数决定了 ED 分布的连续累积量.

- μ 为漂移参数, λ 为扩散参数. μ 是 θ 的函数, 两者存在 1-1 对应关系 (见(43)).
- 若 $\Lambda(t;\alpha) = t$, ED 过程可简化为 Tseng 等 (2016) 提出的平稳 ED 退化模型.
- $\mathrm{E}(Y(t)) = \mu\Lambda(t;\alpha)$, $\mathrm{Var}(Y(t)) = V(\mu)\Lambda(t;\alpha)/\lambda$.
- 称 $V(\mu)$ 为方差函数.

指数分散退化过程与其他过程的关系

- Tweedie 模型 (Tweedie, 1984): 若方差函数 $V(\mu)$ 具有形式

$$V(\mu) = \mu^d, d \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty), \tag{2.10}$$

- 特例:
  1. $d = 0$: 维纳过程
  2. $d = 2$: 伽马过程
  3. $d = 3$: IG 过程
  4. $1 < d < 2$: 复合泊松过程
- 式(2.9)中 $\kappa(\theta)$ 的表示 (Dunn 等, 2005)

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{\mu^{1-d}}{1-d}, & d \neq 1, \\ \log \mu, & d = 1, \end{cases} \quad \kappa(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\mu^{2-d}}{2-d}, & d \neq 2, \\ \log \mu, & d = 2. \end{cases} = \begin{cases} \exp(\theta), & d = 1, \\ -\log(-\theta), & d = 2, \\ \dfrac{[(1-d)\theta]^{(2-d)/(1-d)}}{2-d}, & d \neq 1,\ 2. \end{cases}$$

$\mu = 1$ 时不同模型下 d 与 θ 的关系

表 2.1: 当 $\mu = 1$ 时 d 与 θ 及 $\kappa(\theta)$ 的关系.

d	随机过程	θ	$\kappa(\theta)$
0	维纳过程	1	$\theta^2/2$
1	泊松过程	0	$\exp(\theta)$
(1, 2)	复合泊松过程	$\dfrac{1}{1-d}$	$\dfrac{[(1-d)\theta]^{(2-d)/(1-d)}}{2-d}$
2	伽马过程	-1	$-\log(-\theta)$
3	逆高斯过程	$-\dfrac{1}{2}$	$-\sqrt{-2\theta}$

参数 d 的重要性: 离散程度与 μ 的关系

- 参数 d 不仅决定方差函数的形式, 还反映了数据的离散程度.
- 当 $d = 0$ 时, $\mathrm{Var}(Y(t)) = \Lambda(t;\alpha)/\lambda$, 方差与 μ 无关;
- 当 $d \geq 1$ 时, 方差与 μ 相关: μ 越大, 方差越大.
- 由 $V(\mu) = \mu^d$ 知, 由伽马过程 $(d = 2)$ 或 IG 过程 $(d = 3)$ 生成的退化数据相比于维纳过程 $(d = 0)$ 会更分散.

- 难点: $c(\cdot), \kappa(\cdot)$ 仅在某些特殊 d 值下才有解析形式；通常需要近似.
- 退化增量的分布 (Jørgensen, 1986, 1987, 1998, 1998)

$$f(\Delta y_j; \Theta) = a(\Delta y_j \mid \Delta\Lambda(t_j;\alpha);\lambda) \exp\left\{-\frac{\lambda\Delta\Lambda(t_j;\alpha)}{2} D(\Delta y_j \mid \Delta\Lambda(t_j;\alpha);\mu)\right\},$$

其中 $\Theta = (\lambda, d, \mu, \alpha)$, $D(\Delta y_j \mid \Delta\Lambda(t_j;\alpha);\mu)$ 为单位偏差，见表2.2, $a(\Delta y_j \mid \Delta\Lambda(t_j;\alpha);\lambda)$ 可用鞍点近似表达为 (Jørgensen, 1998)

$$a(\Delta y_j \mid \Delta\Lambda(t_j;\alpha);\lambda) \approx \{2\pi\lambda^{-1}\Delta\Lambda(t_j;\alpha)V(\Delta y_j/\Delta\Lambda(t_j;\alpha))\}^{-1/2}.$$

- 可靠度函数 $R(t;\Theta)$
  - 当 $d=0$ 时, ED 模型简化为维纳过程, 此时具有解析形式 (Xu, Shen 等, 2018)；
  - 当 $d \geq 1$ 时, 可靠性函数可表示为 $R_{ED}(\omega; t, \Theta)$, 其中 $R_{ED}(\cdot)$ 表示均值为 $\mu\Lambda(t;\alpha)$、方差为 $\mu^d\Lambda(t;\alpha)/\lambda$ 的 ED 分布的可靠性函数.
  - 当 $d<0$ 时, 直接计算 $R(t;\Theta)$ 较为困难, 此时可采用蒙特卡洛方法.

表 2.2: Tweedie 模型的单位偏差 $D(\Delta y_j \mid \Delta\Lambda(t_j;\alpha);\mu)$.

随机过程	单位偏差
泊松过程 $(d=1)$	$2\left\{\frac{y}{\Lambda(t;\alpha)}\log\left(\frac{y}{\Lambda(t;\alpha)\mu}\right)-\left(\frac{y}{\Lambda(t;\alpha)}-\mu\right)\right\}$
伽马过程 $(d=2)$	$2\left\{\frac{y}{\Lambda(t;\alpha)}\log\left(\frac{y}{\Lambda(t;\alpha)\mu}\right)+\frac{y}{\Lambda(t;\alpha)\mu}-1\right\}$
其他过程 $(d\neq 1,2)$	$2\left\{\frac{(y/\Lambda(t;\alpha))^{2-d}}{(1-d)(2-d)}-\frac{y\mu^{1-d}}{\Lambda(t;\alpha)(1-d)}+\frac{\mu^{2-d}}{2-d}\right\}$

带随机效应的指数扩散过程

- 异质性参数: $\mu \sim TN(\eta, 1/\tau^2)$(截断正态分布), 其 PDF 为

$$f_{TN}(\mu) = \frac{\tau\phi(\tau(\mu-\eta))}{1-\Phi(-\tau\eta)}, \quad \mu > 0, \tau > 0,$$

- 异质性参数: $\lambda \sim Ga(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$, 其 PDF 为

$$f_{Ga}(\lambda) = \frac{\beta_\lambda^{\alpha_\lambda}}{\Gamma(\alpha_\lambda)}\lambda^{\alpha_\lambda-1}\exp\{-\beta_\lambda\lambda\}.$$

- 异质性参数:

$$\begin{aligned} \mu \mid \lambda \sim & TN(\eta, \tau^{-2}/\lambda), \\ \lambda \sim & Ga(\alpha_\lambda, \beta_\lambda) \end{aligned} \quad \text{(伽马—截断正态混合分布)}. \tag{2.11}$$

- 统计推断: EM, MCMC. 见徐安察, 汤银才, 庄亮亮 (2026, 第 5.1 节).

提纲

概述

1. 带测量误差的退化模型
2. 带变点的退化模型
3. 加速退化模型
4. 多元 (竞争) 退化模型
5. 动态退化模型
6. 其他复杂系统的退化模型

提纲

模型的定义 (Ye, et. al, 2013)

- 理论模型:

$$\begin{aligned} Y(t) &= X(t) + \varepsilon \\ X(t) &= \beta\Lambda(t) + \sigma\mathcal{B}(\Lambda(t))(\text{维纳退化过程}) \\ \varepsilon &\sim N(0,\gamma^2)(\text{观测误差}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

- 数据模型:

$$Y(t_{i,j}) = X(t_{i,j}) + \varepsilon_{i,j}, i = 1,2,\ldots,n, j = 1,2,\ldots,m. \tag{3.2}$$

- 其中
  - $\varepsilon_{i,j}, j = 1,2,\ldots,m$ 独立同分布 (i.i.d.)
  - ε 与 $X(t)$ 独立
  - $Y(t_{i,\cdot})$ 与 $Y(t_{j,\cdot})$ $(i \neq j)$ 独立
  - 异质性参数: $\beta \sim N(\mu,\kappa^2)$

统计推断: 似然函数

☞ 令 $\Delta Y_{i,1}=Y_{i,1}$, $\lambda_{i,1}=\Lambda_{i,1}$, $\Delta Y_{i,j}=Y_{i,j}-Y_{i,j-1}$, $\lambda_{i,j}=\Lambda_{i,j}-\Lambda_{i,j-1}$ $(i=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots,m)$, 则 $\Delta\boldsymbol{Y}_i=(\Delta Y_1,\ldots,\Delta Y_m)'$ 服从多元正态分布 $\mathcal{N}(\beta\boldsymbol{\lambda}_i,\boldsymbol{\Sigma}_i)$,

$$f(\Delta\boldsymbol{y}_i)=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}_i|^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{y}_i-\beta\boldsymbol{\lambda}_i)'\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\Delta\boldsymbol{y}_i-\beta\boldsymbol{\lambda}_i)\right]$$

其中 $\Delta\boldsymbol{y}_i=(\Delta y_{i,1},\Delta y_{i,2},\ldots,\Delta y_{i,m})'$, $\boldsymbol{\lambda}_i=(\lambda_{i,1},\lambda_{i,2},\ldots,\lambda_{i,m})'$, $\boldsymbol{\Sigma}_i$ 是协方差矩阵，其第 (g,k) 个元素为

$$\mathrm{Cov}\left(\Delta Y_{i,g},\Delta Y_{i,k}\mid\beta\right)=\begin{cases}\sigma^2\lambda_{i,1}+\gamma^2, & g=k=1;\\ \sigma^2\lambda_{i,k}+2\gamma^2, & g=k>1;\\ -\gamma^2, & g=k+1 \text{ 或 } g=k-1;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

提纲

示例：OLED 退化数据

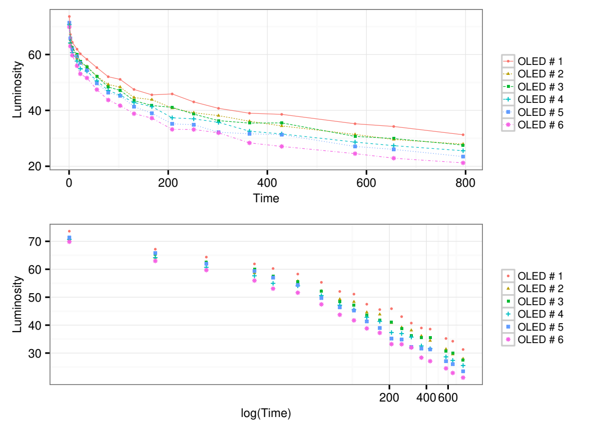


图 3.1: OLED 光度退化数据：上方为时间轴，下方为对数时间轴.

相关研究

- 早期工作: Tseng et al. (1995), Bae and Kvam (2006), Bae et al. (2008), Bae et al. (2015).
- 维纳过程: Wang et al. (2018a, 2018b), Zhang et al. (2019), Li & Wang et al. (2023), etc.
- 伽马退化过程: Ling et al. (2021), Wang, Tang, Chen (2022).
- IG 退化过程: Duan and Wang (2017), Ma et al. (2023).
- 重参数化 IG 退化过程: Zhuang, Xu, Wang, Tang (2024, EJOR)

我们的工作

- Wang, Tang, Bae, He (2018, RESS) 针对 OLE 退化数据给出了带变点的维纳退化过程的贝叶斯推断方法.
- Wang, Tang, Bae, Xu (2018, IEEE Tr. R) 进一步考虑了带测量误差的情况.

二阶段维纳退化过程

- 考虑维纳退化模型

$$X(t) = m(t) + \sigma\mathcal{B}(t), \tag{3.3}$$

- 漂移参数 $m(t) = \beta t$ 上设定变点 τ:

$$(t; \beta^H, \beta^L, \tau) = \begin{cases} \beta^H t, & 若\ t \le \tau \\ \beta^L(t-\tau) + \beta^H\tau, & 若\ t > \tau, \end{cases} \tag{3.4}$$

- 加上测量误差 $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \gamma^2)$:

$$Y(t) = X(t) + \epsilon, \tag{3.5}$$

- 异质性参数: β^H, β^L, τ

$\Delta Y_{i,j}$ 的统计性质

- 期望

$$\Delta m_{i,j} = \begin{cases} \beta_i^H \Delta t_{i,j}, & \text{若 } \tau_i \geq t_{i,j+1}, \\ \beta_i^H(\tau_i - t_{i,j}) + \beta_i^L(t_{i,j+1} - \tau_i), & \text{若 } t_{i,j} \leq \tau_i < t_{i,j+1}, \\ \beta_i^L \Delta t_{i,j}, & \text{若 } \tau_i < t_{i,j}, \end{cases}$$

- $\Delta Y_{i,g}$ 与 $\Delta Y_{i,k}$ 的协方差

$$\mathrm{Cov}(\Delta Y_{i,g}, \Delta Y_{i,k}) = \begin{cases} \sigma^2 \Delta t_{i,1} + \gamma^2, & \text{若 } k = g = 1, \\ \sigma^2 \Delta t_{i,k} + 2\gamma^2, & \text{若 } k = g > 1, \\ -\gamma^2, & \text{若 } k = g + 1 \text{ 或 } g = k + 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

统计推断: 似然函数

- $\boldsymbol{\beta}^H \equiv (\beta_1^H, \ldots, \beta_n^H)$.
- $\boldsymbol{\beta}^L \equiv (\beta_1^L, \ldots, \beta_n^L)$.
- $\boldsymbol{\tau} \equiv (\tau_1, \ldots, \tau_n)$.
- $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^H, \boldsymbol{\beta}^L, \boldsymbol{\tau}, \sigma^2, \gamma^2)$.

$(\boldsymbol{\beta}^H, \boldsymbol{\beta}^L, \boldsymbol{\tau}, \sigma^2, \gamma^2)$ 的似然函数

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi)^{-\frac{n_i-1}{2}} |\Sigma_i|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(\Delta \boldsymbol{y}_i - \Delta \boldsymbol{m}_i)^\intercal \Sigma_i^{-1} (\Delta \boldsymbol{y}_i - \Delta \boldsymbol{m}_i)}{2}\right]. \tag{3.6}$$

示例：OLED 退化数据分析

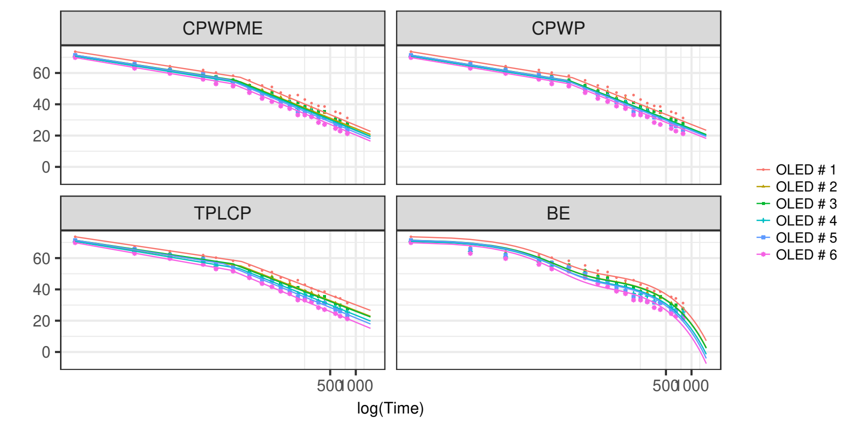


图 3.2: 四种不同方法的拟合结果，横轴为对数时间.

预测效果比较

准则：均方预测误差 (MSPE, Mean squared prediction error)

$$\text{MSPE} = \sum_{j=1}^{n_i} (y_{i,j} - \hat{y}_{i,j})^2 , \tag{3.7}$$

6 个退化数据用于拟合，第 7 个退化数据用于预测.

表 3.1: 第 7 个 OLED 退化轨道的 MSPE.

Model	CPWPME	CPWP	TPLCP	BE
MSPE	360.04	406.04	436.29	678.53

提纲

恒加维纳退化模型

- 在每个应力水平 $S_l, i = 1, \ldots, r,$ 下施加恒定应力, 并且在每个恒定应力下有 n_l 产品进行试验.

- 在每一个恒定应力水平 $S_l, i = 0, 1, \ldots, r,$ 下, 产品的退化量 $y_l(t)$ 是服从一个带漂移 $\eta(S_l)$ 和扩散参数 δ^2 的 Wiener 过程.

$$y_l(t) = \eta(S_l)t + \delta B(t),$$

- 参数 $\eta_l = \eta(S_l)$ 与应力 $S_l, l = 0, 1, \ldots r,$ 之间的关系为如下

$$\ln(\eta_l) = a + b\varphi(S_l), \tag{3.8}$$

  其中 a, b 是待估参数.

- 统计推断: Lim & Yum (2011), Guan, Tang, Xu(2016)

步加维纳退化模型

$r = 3$ 时典型的步加退化试验示意图.

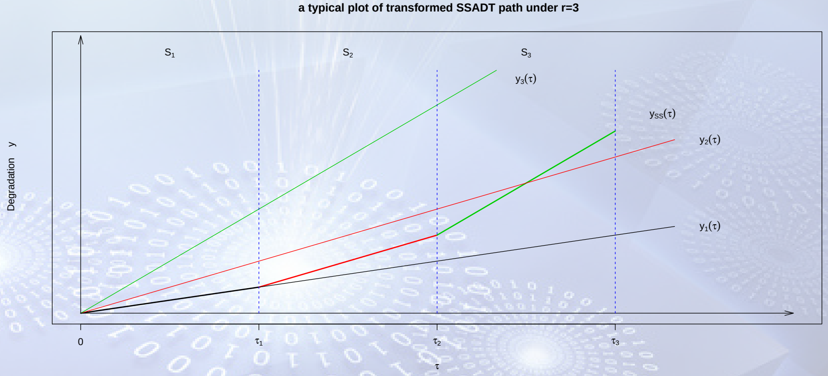


图 3.3: 步进应力退化试验

步加维纳退化模型

- 步进应力加速退化试验的应力 S 为如下

$$S = \begin{cases} S_1, & 若\ 0 \le t < t_1; \\ \vdots & \vdots \\ S_r, & 若\ t_{r-1} \le t < t_r. \end{cases}$$

- 每一个恒定应力水平 $S_l, l = 0, 1, \ldots, r$, 下, 退化量 $y_l(t)$ 有

$$y_l(\tau) = \phi(y(t|S_l)) = \eta_l t + \delta B(t), l = 0, 1, \ldots, r.$$

- 参数 $\eta_l = \eta(S_l)$ 与应力 $S_l, l = 0, 1, \ldots r$, 之间的关系为如下

$$\ln(\eta_l) = a + b\varphi(S_l), \tag{3.9}$$

步加应力下的退化量

☞ 折算模型:

$$y_{SS}(t) = \begin{cases} \eta_1 t + \delta B(t), & t \in [0, t_1) \\ \eta_2 (t - t_1) + \eta_1 t_1 + \delta B(t), & t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ \eta_l (t - t_{k-1}) + \sum_{l=1}^{k-1} \eta_l (t_l - t_{l-1}) + \delta B(t), & t \in [t_{k-1}, t_k) \end{cases}$$

☞ 统计推断

- 早期见 Liao & Tseng (2006)
- Guan, Tang, Xu (2016) 给出了客观贝叶斯推断
- Zhou, Tang 等 (2026, RESS) 给出了一个基于 INLA 的加速贝叶斯推断算法

恒加 ED 退化模型

- 在恒定应力水平 $S_l, l = 0, 1, \ldots, r$, 下, 产品的退化量 $y_l(t)$ 是服从 ED 过程或 TED 过程.

$$y_l \sim ED(\mu(S_l)\Lambda(t_l;\alpha), \lambda)$$

$$\text{或 } y_l \sim TED(\mu(S_l)\Lambda(t_l;\alpha), \lambda, d)$$

- 参数 $\eta_l = \eta(S_l)$ 与应力 $S_l, i = 0, 1, \ldots r$, 之间的关系为如下

$$\mu(S_l) = \mu \exp(\beta\phi(S_l)), \tag{3.10}$$

- Wang, Tang (2025, STARF) 进一步考虑更一般的情况:

$$\mu(S_l) = \mu \exp(\beta\phi(S_l)) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon \sim N(0, \delta^2) \tag{3.11}$$

- 异质性参数: μ.

提纲

示例 1: HMT 退化数据

- 为保持重型机床的高可用性与高效率，需实施预防性维护和系统健康管理.
- 重型机床（HMT，heavy machine tool）具有两个关键性能指标：定位精度和输出功率.
- 当定位精度超过阈值 $\omega_1 = 35$ 或输出功率超过阈值 $\omega_2 = 120$ 时，判定 HMT 发生故障.
- 目的:
  - 建立二元退化过程
  - 预测退化轨道上的缺失值

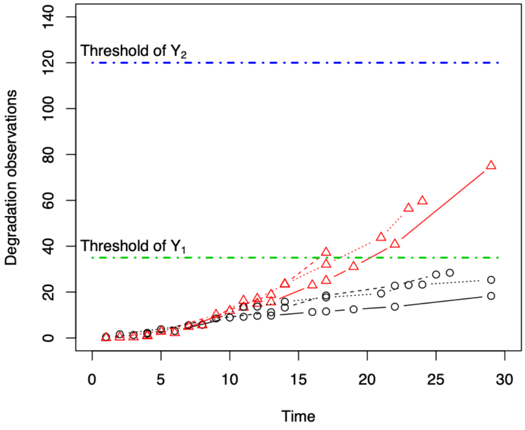


图 3.4: HMT 定位精度和输出功率的退化路径.

二元维纳退化过程模型

$$Y_s(t) = \alpha\beta_s h_s(t,\gamma_s) + \sigma_s B_s(h_s(t,\gamma_s)),\ \ s = 1,2, \tag{3.12}$$

- $h_s(t,\gamma_s)$ 递增, $h_s(0,\gamma_s) = 0$.
- $B_s(\cdot)$ 为标准维纳过程， $B_1(\cdot)$ 与 $B_2(\cdot)$ 独立.
- $\alpha \sim N(1,\delta^2)$， 既是个异质性参数(单元的个体效应)， 又对二个 PC 的退化产生共同影响(共同效应).

$Y_1(t)$ 与 $Y_2(t)$ 的联合分布

$$(Y_1(t), Y_2(t))^\top \sim \boldsymbol{N}_2(\mu_H, \Sigma), \tag{3.13}$$

其中 $\mu_H = (\beta_1 h_1(t,\gamma_1), \beta_2 h_2(t,\gamma_2))^\top$,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 h_1(t,\gamma_1) + \delta^2\beta_1^2 h_1^2(t,\gamma_1) & \delta^2\beta_1\beta_2 h_1(t,\gamma_1)h_2(t,\gamma_2) \\ \delta^2\beta_1\beta_2 h_1(t,\gamma_1)h_2(t,\gamma_2) & \sigma_2^2 h_2(t,\gamma_2) + \delta^2\beta_2^2 h_2^2(t,\gamma_2) \end{pmatrix}.$$

寿命分布

- $T_s = \inf\{t : Y_s \geq \omega_s\}$.
- T_1 与 T_2 的联合 CDF 为
$$F(t_1, t_2) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$
其中 $A_l, l = 1, 2, 3, 4$ 可表示为易于计算的式子.
- 系统的寿命 $T = \min(T_1, T_2)$, 其可靠度函数为 $R(t) = F(t,t) + 1 - F_{T_1}(t) - F_{T_2}(t)$, 其中
$$F_{T_s}(t) = \Phi\left(\frac{\beta_s h_s(t,\gamma_s) - \omega_s}{\sqrt{\beta_s^2\delta^2(h_s(t,\gamma_s))^2 + \sigma_s^2 h_s(t,\gamma_s)}}\right) + \exp\left\{\frac{2\beta_s\omega_s}{\sigma_s^2} + \frac{2\beta_s^2\delta^2\omega_s^2}{\sigma_s^4}\right\}\Phi\left(-\frac{2\beta_s^2\delta^2\omega_s h_s(t,\gamma_s) + \sigma_s^2(\beta_s h_s(t,\gamma_s) + \omega_s)}{\sigma_s^2\sqrt{\beta_s^2\delta^2(h_s(t,\gamma_s))^2 + \sigma_s^2 h_s(t,\gamma_s)}}\right)$$

剩余寿命 (RUL)

☞ 第 s 个 PC 在时刻 t_k 的 RUL:

$$L_{t_k}^{(s)} = \inf\{l : Y_s(l + t_k) \geq \omega_s | Y_s(t_j) < \omega_s, j = 1, 2, \ldots, k\},\ \ s = 1, 2,$$

其中 t_1, …, t_k 测量的时间.

☞ 系统的 RUL:

$$L_{t_k} = \min(L_{t_k}^{(1)}, L_{t_k}^{(2)}).$$

☞ L_{t_k} 在时刻 l 的可靠度函数:

$$R_{L_{t_k}}(l) = F_{L_{t_k}}(l, l) + 1 - F_{L_{t_k}^{(1)}}(l) - F_{L_{t_k}^{(2)}}(l), \tag{3.14}$$

其中 $F_{L_{t_k}^{(s)}}(l)$ 是 $L_k^{(s)}$ 的 CDF, 可解析表示.

统计推断: 基于 Gibbs 抽样的贝叶斯方法

- 数据: $(y_{isj}, t_{isj}), i = 1, 2, \ldots, n, s = 1, 2, j = 1, 2, \ldots, m_{is}$
- $y_{is0} = 0, \quad z_{isj} = y_{isj} - y_{is(j-1)}, \Lambda_{isj} = h_s(t_{isj}, \gamma_s) - h_s(t_{is(j-1)}, \gamma_s)$
- 贝叶斯模型 (第 i 个系统)

$$
\begin{aligned}
z_{isj}|\alpha_i &\sim \boldsymbol{N}(\alpha_i\beta_s\Lambda_{isj}, \sigma_s^2\Lambda_{isj}), \\
\alpha_i &\sim \boldsymbol{N}(1, \delta^2), \\
\beta_s &\sim \boldsymbol{N}(1, 10^3); 1/\sigma_s^2 \sim \boldsymbol{IG}(0.01, 0.01), \\
1/\delta^2 &\sim \boldsymbol{IG}(0.01, 0.01); \gamma_s \sim \boldsymbol{IG}(0.01, 0.01).
\end{aligned}
$$

- 满条件后验分布: α_i, β_s 为正态; σ_s^2 为 IG; γ_s 的可解析表示为

$$
\prod_{i=1}^{n}\prod_{s=1}^{2}\prod_{j=1}^{m_{is}} \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{isj}}} \exp\left\{-\frac{(z_{isj} - \alpha_{is}\Lambda_{isj})^2}{2\sigma_s^2\Lambda_{isj}}\right\} (\gamma_s)^{c_s - 1} \exp\{-d_s\gamma_s\}.
$$

结果

取 $h_1(t,\gamma_1)=t$, $h_2(t,\gamma_2)=t^{\gamma_2}$ (Peng et al.,2016).

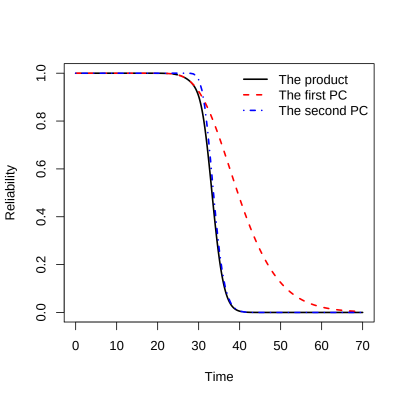


图 3.5: 系统及二个 PC 的可靠度.

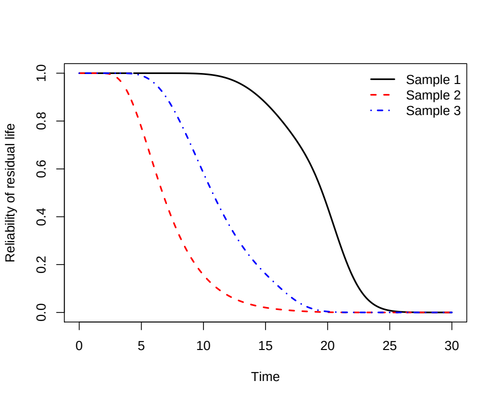


图 3.6: 三个系统 RUL 的可靠度.

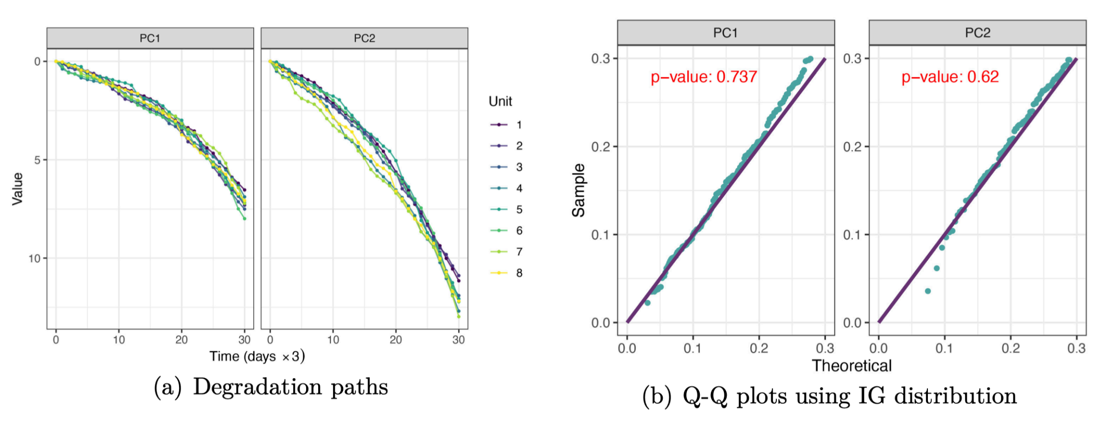


图 3.7: PMB 两类性能特征量 (PC1, PC2) 的退化路径及 IG 分布的 Q-Q 图.

示例 2：PMB 退化数据

Unit	1	2	3	4	5	6	7	8
Correlation	0.819	0.749	0.806	0.840	0.779	0.749	0.765	0.800

图 3.8: 8 个不同单元两类性能特征量之间的皮尔逊相关系数.

- **目的**: 建立多元重参数化 IG 退化过程模型
- 估计方法: 基于 EM 的极大似然方法, 详见 (Xu 等, 2018, IEEE Tr. R)

提纲

多部件复杂系统退化数据的建模

- 部件之间的相关性建模方法
  - 基于 Copula 构建多元分布 (Peng 等, 2016; Fang & Pan, 2021), 缺点: 解释较困难
  - 基于多元分布 (Fang 等, 2022), 缺点: 验证较为复杂
  - 基于共同效应模型 (Xu 等, 2018), 见上一小节, 缺点: 共同效应与时间无关, 无法反映环境的时变效应
  - 基于脆弱因子 (Frailty, 不可观测的随机比例因子) 模型 (Hougaard, 1995; Liu, 2012). 缺点: 无法反映环境的时变效应
- 近期工作: Hong, Zhai, Wang, Ye (2019, IEEE TR. R.); Xu, Zhou, Tang (2021, IEEE TR. R); Zhou et al. (2025, RESS); Zhengzhi Lin, Xiao Liu, Yisha Xiang, Yili Hong (2025, RESS).
- 目的: 用过程对时变的动态环境直接建模

- 动态环境是影响系统寿命不可忽视的重要因素, 例如,
  - 锂电池的寿命取决于充电和放电次数、使用习惯以及使用温度等;
  - 车辆刹车片和轮胎的老化或磨损过程与道路条件、驾驶习惯和使用率相关.
- 动态因素会导致部件的等效工作时间 $A(t)$ 呈现随机性, 进而反映出动态环境对老化过程的累积影响.
- 为描述这种累积效应, Nelson (1980) 提出了累积损伤模型, 经常用于加速寿命试验，实现不同应力下寿命试验数据的折算.
- Hong 等 (2019) 基于此假设 $A(t)$ 是一个随机时间尺度, 并提出以下模型

$$F_i(t) = 1 - \exp\{-\eta_i A(t)\}, \tag{3.15}$$

其中 $\eta_i > 0$ 为基准故障率，$A(t)$ 则描述运行环境应力对时间尺度的影响.

随机时间尺度模型的不足与纠正

- $F_i(t)$ 包含一些常见的寿命分布作为特例, 例如,
  - 威布尔分布 ($A(t) = t^\alpha$)
  - Gompertz 分布 ($A(t) = \exp(\alpha t) - 1$)
  - Lomax 分布 ($A(t) = \log(1 + t/\alpha)$)
- $A(t)$ 可以解释为部件老化过程的度量 (Meeker, 2018, 2021).
  - 例如，在恒定环境下 (如恒加试验), $A(t)$ 通常被设定为确定性的时间尺度.
  - 不足: 但实际情况中, 系统部件往往处于动态环境中, 其工作条件可能随着时间变化而显现出随机性.
- 修正: 用退化随机过程代替静态的时间尺度函数.
  - Hong 等 (2019): 通过复合泊松过程和 IG 过程对动态环境 $Y(t)$ 进行建模，实例中采用非齐次泊松过程代替 (近似) 复合泊松过程
  - Xu 等 (2021)：采用 ED 过程捕捉系统各部件 (子系统) 动态环境的影响. 见徐安察，汤银才，庄亮亮 (2026, 第 5.2 节).

新的模型

动态退化模型

$$\begin{aligned} T_i \mid Y(t) &\sim F_i(t \mid Y(t)), \\ Y(t) &\sim \mathcal{ED}(\mu\Lambda(t;\alpha), \lambda), \end{aligned} \tag{3.16}$$

其中 T_i 表示部件寿命, $F_i(t \mid Y(t))$ 为其条件分布; $Y(t)$ 为反映时间尺度的随机过程, 服从 ED 过程 $\mathcal{ED}(\mu\Lambda(t;\alpha), \lambda)$.

注:

- 随机过程 $Y(t), t \geq 0$ 应满足非递减性, 并且初始值 $Y(0) = 0$.
- 若方差函数 $V(\mu) = \mu^d$ 中的 $d \leq 0$ 时, ED 过程可能失去单调性，为些限定 $d \geq 1$.
- 为避免模型 (3.16) 中的参数出现不可识别性, 进一步假设漂移参数 $\mu = 1$. 此时 d 与 θ 及 $\kappa(\theta)$ 之间的关系见表2.1.

结论 1: 二部件系统的联合生成函数

令 T_1 和 T_2 表示部件 1 和 2 的寿命. 设 t_1 和 t_2 为 T_1 和 T_2 的观测值. , r_i 表示 t_i 按升序排列时第 i 个部件寿命的秩. 基于寿命的秩重排基准故障率为 $\eta_{(r_i)}$.

定理 3.1

若 T_i 的条件 CDF 定义为式 (3.15) ($i=1,2$), 且 $Y(t)\sim\mathcal{ED}(\Lambda(t;\alpha),\lambda)$), 则 T_1 和 T_2 的联合生存函数为

$$\begin{aligned} S(t_1,t_2)=\exp\Bigg\{&\lambda\Lambda(t_{r_1};\alpha)\left[\kappa\left(\theta-\frac{\eta_1+\eta_2}{\lambda}\right)-\kappa\left(\theta-\frac{\eta_{(2)}}{\lambda}\right)\right]\\ &+\lambda\Lambda(t_{r_2};\alpha)\left[\kappa\left(\theta-\frac{\eta_{(2)}}{\lambda}\right)-\kappa(\theta)\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

注 1: 当 $d=1,\lambda=1$ 时，即为 Hong 等 (2019) 中的复合泊松过程的联合生成函数. 若 $1<d<2$,$d=2$ 和 $d=3$ 分别得到特殊的结果.

结论 2: 模型的适用性

定义 3.2

当对于所有 t_1 和 t_2, 满足

$$P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) \geq P(T_1 > t_1)P(T_2 > t_2),$$

则称两个随机变量 T_1 和 T_2 具有正象限相关(positive quadrant dependent).

定理 3.3

在定理 3.1 的条件下, 部件寿命 T_1 和 T_2 具有正象限相关.

注 2: 定理 3.3 表明, 随机时间尺度 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 引入了部件寿命之间的相关性. 当 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 为确定性函数 $\Lambda(t;\alpha)$ (即 $\lambda \to \infty$) 时, 可以证明 T_1 和 T_2 独立.

注 3: 定理 3.3 的结果也适用于某些非单调随机过程.

定理 3.4

若 T_i 的条件 CDF 定义为式 (3.15) $(i=1,\ldots,K)$, 且 $Y(t)\sim\mathcal{ED}(\Lambda(t;\alpha),\lambda)$, 那么 $(T_1,\ldots,T_K)$ 的联合生存函数为

$$S(t_1,\ldots,t_K)=\prod_{i=1}^{K}\exp\left\{-\lambda\Lambda(t_{(r_i)};\alpha)\nabla\kappa_i\right\},$$

其中 $\nabla\kappa_i=\kappa\left(\theta-\sum_{k=i+1}^{K}\eta_{(r_k)}/\lambda\right)-\kappa\left(\theta-\sum_{k=i}^{K}\eta_{(r_k)}/\lambda\right)$, 且 $\sum_{k=K+1}^{K}\eta_{(r_k)}=0$.

结论 3: K 部件系统的联合生成函数 (续)

注 4: 定理 3.4 包括了 Hong 等 (2019) 的结果及一些非递减随机过程的结果.

注 5: 根据定理 3.3, 任意两个部件的寿命 T_i 和 T_j 之间具有正象限相关. 当随机时间尺度 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 退化为确定性函数 $\Lambda(t;\alpha)$(即 $\lambda \to \infty$) 时, 联合生存函数退化为

$$S(t_1, \ldots, t_K) = \prod_{i=1}^{K} \exp\left\{-\eta_i \Lambda(t_i;\alpha)\right\},$$

这表明部件寿命 $T_1, \ldots, T_K$ 之间相互独立.

结论 4: 串联系统可靠度

1. 根据定理 3.4, K 部件**串联系统**的寿命 $T=\min\{T_1,\dots,T_K\}$ 的可靠度函数为

$$R_S(t)=P(T_1>t,\dots,T_K>t)=\exp\left\{-\lambda\Lambda(t;\alpha)\left[\kappa(\theta)-\kappa\left(\theta-\sum_{i=1}^{K}\eta_i/\lambda\right)\right]\right\}.$$

2. 若 $T_1,\dots,T_K$ 之间相互**独立**, 则系统可靠度函数为

$$R_{IS}(t)=\exp\left\{-\lambda\Lambda(t)\sum_{i=1}^{K}[\kappa(\theta)-\kappa\left(\theta-\eta_i/\lambda\right)]\right\}.$$

3. 当 $Y(t)$ 退化为确定性函数 $\Lambda(t;\alpha)$ (即 $\lambda\to\infty$) 时, 系统可靠度可以简化为

$$R_{DS}(t)=\exp\left\{-\Lambda(t;\alpha)\sum_{i=1}^{K}\eta_i\right\}.$$

结论 4: 串联系统可靠度 (续)

定理 3.5 给出了 $R_S(t)$, $R_{IS}(t)$ 与 $R_{DS}(t)$ 之间的关系.

定理 3.5

$$R_{DS}(t) < R_{IS}(t) < R_S(t).$$

定理 3.5 揭示了两个重要结论:

1. 如果未考虑动态环境的影响, 则会低估系统可靠性 ($R_{DS}(t) < R_{IS}(t)$).
2. 忽略部件寿命之间的正相关性, 也会导致系统可靠性的低估 ($R_{IS}(t) < R_S(t)$).

注 6: 对于串并联系统，可类似写出系统的可靠度.

提纲

总结

退化过程模型

- 四类基础退化模型
- 五类高级退化模型
- 主要推断方法 (根据异质性参数的分布)
  - 似然方法：基于 EM
  - 贝叶斯方法; 基于 MCMC

更多退化过程及高效算法的研究

- 多状态的退化过程 (已有很多结果)
- ADT 的最优设计 (已有很多结果)
- 复杂环境变量引入退化过程
- 深度学习或 A I 的使用

谢 谢

THANKS

yctang@stat.ecnu.edu.cn

https://tangyc8866.github.io