



退化过程的统计建模：理论与实践

汤银才

华东师范大学统计学院

徐安察, 庄亮亮

2025-09-14

1 引言

- 认识退化数据
- 退化数据示例

2 基本退化模型

- 维纳退化过程
- 伽马退化过程
- 逆高斯退化过程
- 指数分散退化过程

3 高级退化模型

- 带测量误差的退化模型
- 带变点的退化模型
- 加速退化模型
- 多元 (竞争) 退化模型
- 动态退化模型

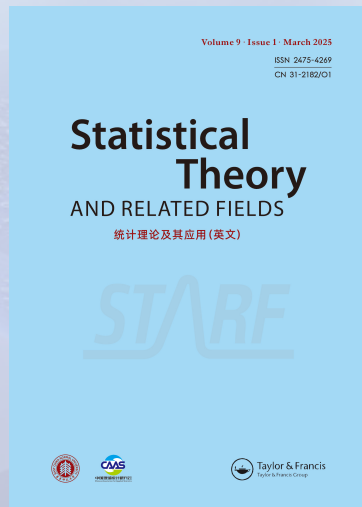
4 总结

👉 《应用概率统计》

- 1985 年创刊
- 被 CSCD, 北大核心等收录
- 数学科技期刊分级目录 (T3)
- 现任主编: 陈松蹊院士

👉 《统计理论及其应用 (英)》

- 17 年创刊
- 19 年入选《中国科技期刊卓越行动计划》高起点新刊项目
- 21 年国内创刊
- 被 Scopus(2019.5),
CSCD(2022.4), DOAJ(2022.9),
ESCI(2022.11), JCR Q2(2025.6),
数学会 T3 系列 (2024.8), 中国院
分区 Q4(2025.3) 收录.



- ✎ **加速寿命试验**, Nelson (1990); 茆诗松, 王玲玲 (1997).
- ✎ **无失效数据**的可靠性分析: Martz & Waller (1979); 茆诗松, 罗朝斌 (1989); 张占忠, 杨振海 (1989); 韩明 (1999, 专著).
- ✎ **退化路径模型**: Chow & Shao (1991); Lu & Meeker (1993); Meeker & Escobar (1993); 庄东辰, 茆诗松 (1994, 2013); Meeker & Escobar (1998, 专著).

华东师大一九九四届
博士研究生学位论文

退化失效模型及其统计分析

系 别 数理统计系

专 业 数理统计

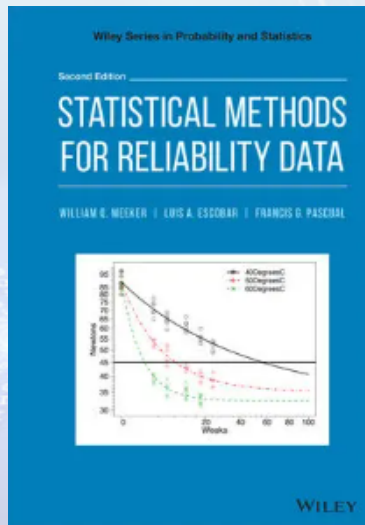
研究方向 可靠性理论及其应用

研 究 生 庄东辰

导 师 茆诗松 教授

1994 年 3 月





随机退化过程 与统计建模

徐安察, 汤银才, 庄亮亮

科学出版社
2026 年 5 月

我的几个学生：

- 👉 徐安察, 浙江工商
- 👉 管 强, 三明学院
- 👉 王平平, 南经财经
- 👉 周世荣, 温州大学
- 👉 王昱栋, NUS, Upenn
- 👉 庄亮亮, 南京理工

1 引言

2 基本退化模型

3 高级退化模型

4 总结

1 引言

- 认识退化数据
- 退化数据示例

2 基本退化模型

3 高级退化模型

4 总结

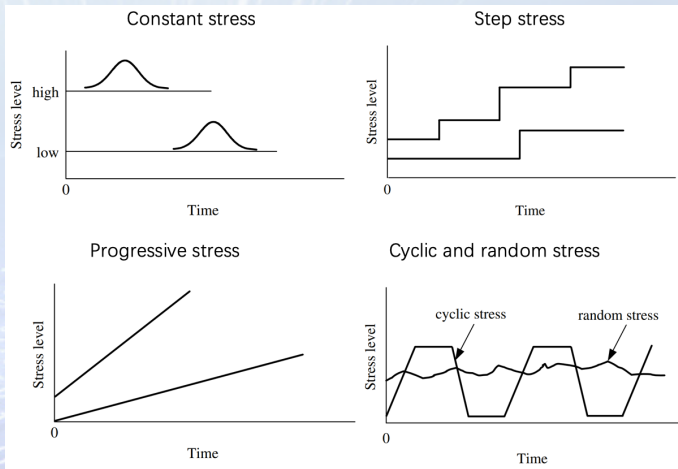


图 1.1: 试验的类型.

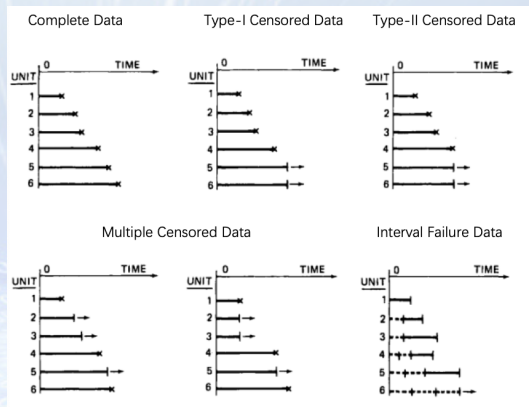
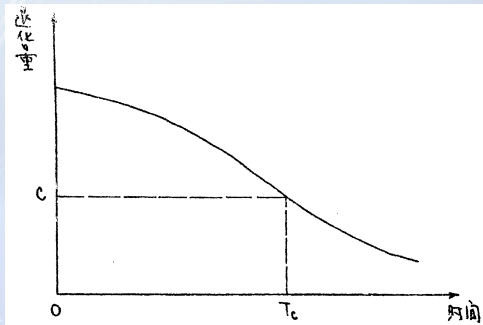
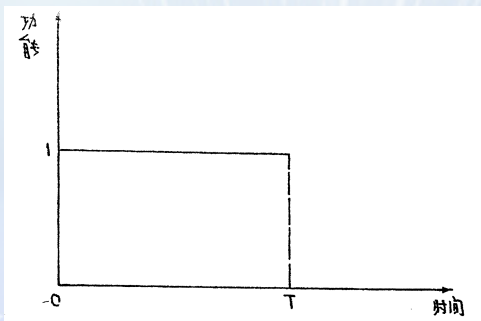


图 1.2: 截尾类型: 事件图.

参见: 茆诗松, 汤银才, 《可靠性统计》, 高等教育出版社, 2008



-  **突发型失效**: 从 0 到 T , 产品功能处于 1 状态, 而在 T 时刻突发性地转到 0 状态 (功能完全丧失), 即产品失效。 T 即产品的寿命。
-  **退化型失效**: 在 $[0, T_c]$, 产品的退化量高于**失效标准** y_c , 即产品处于正常工作状态, 而在 (T_c, ∞) , 产品的退化量低于 (高于) 失效标准 y_c , 判定为产品失效 (软失效)。 T_c 为产品的寿命。
-  退化型失效的特点: 产品在失效之前功能就在不断下降, 而失效之后功能并不完全丧失, 且失效与否是相对于失效标准而言的。

- ➡ 随着高科技的发展, 许多产品设计要求具有很高的可靠度, 即使采用**加速寿命试验**, 也难以收集这些产品的失效数据.
- ➡ 退化数据为获取高可靠性产品的可靠性信息提供了有用的资源。例如:
 - ➡ LED 阵列的光输出衰减
 - ➡ 光伏阵列的功率输出下降
 - ➡ 管道的腐蚀
 - ➡ 风力涡轮机中磨损轴承的振动
 - ➡ 汽车漆面的光泽和颜色损失
 - ➡ 饮料的菌落总数/大肠菌群的增加
 - ➡ 过度劳累会使人处于亚健康状态
- ➡ **加速退化试验 (ADT)**有助于更快地揭示高可靠性产品的寿命相关信息.
 - ➡ 恒加退化试验 (CSADT)
 - ➡ 步加退化试验 (SSADT)

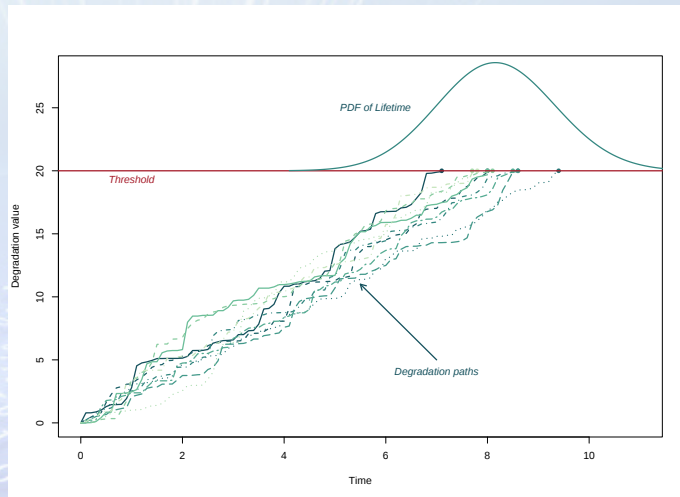


图 1.3: 完全退化试验与寿命分布

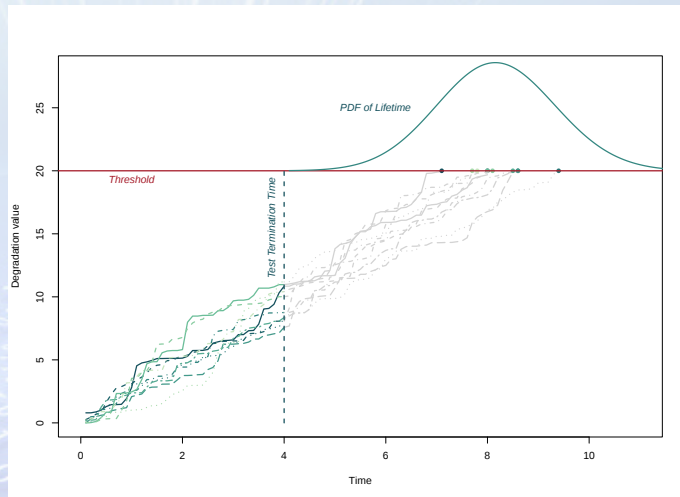


图 1.4: 定时截尾退化试验示意图

☞ $Y(t)$: 性能退化特征量 (PC)
的退化过程 (DP)

☞ y_C : 失效阈值, T : 寿命

$$T = \begin{cases} \inf\{t : Y(t) \geq y_C\}, & \text{递增 DP} \\ \sup\{t : Y(t) \leq y_C\}, & \text{递减 DP} \end{cases}$$

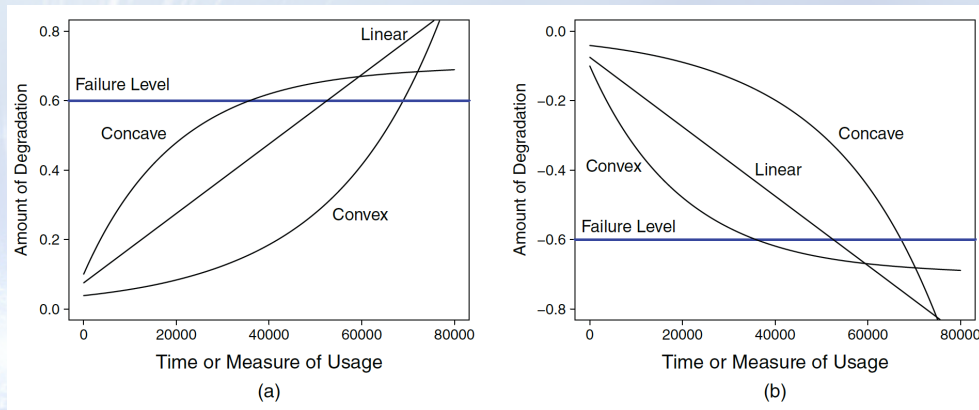


图 1.5: 退化曲线的三种典型形态

$$F_Y(y_C | t) = P(Y(t) < y_C | t)$$

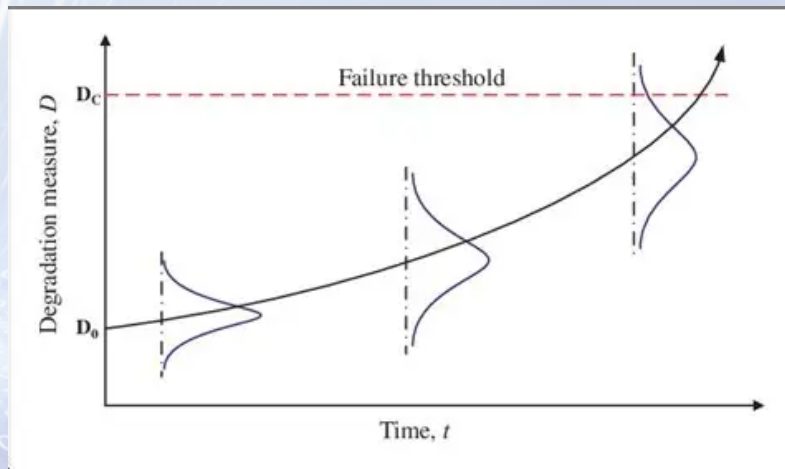


图 1.6: 递增退化过程与退化分布

$$F_T(t | y_C) = P(T < t | Y_C)$$

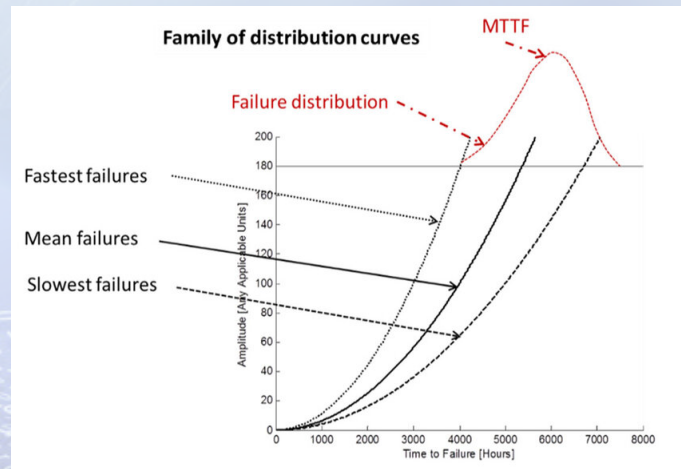


图 1.7: 失效分布

$$F_T(t | y_C) = \begin{cases} R_Y(y_C | t), & \text{递增 DP} \\ F_Y(y_C | t), & \text{递减 DP} \end{cases}$$

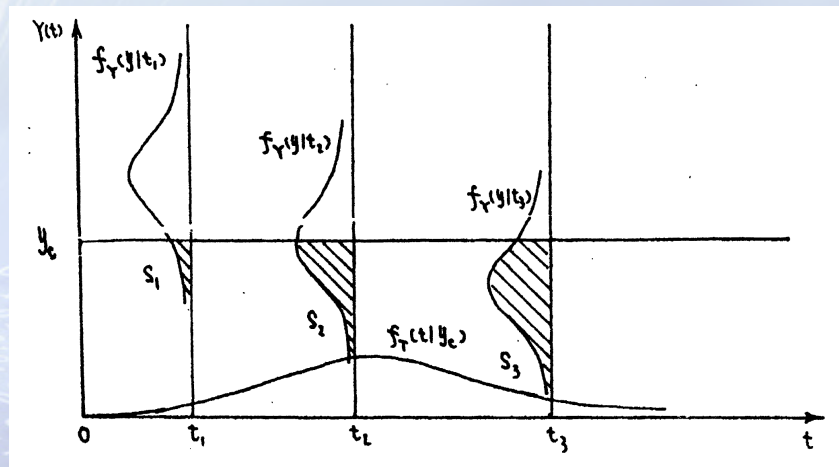


图 1.8: 退化分布与寿命分布之间的关系

1 引言

- 认识退化数据
- 退化数据示例

2 基本退化模型

3 高级退化模型

4 总结

示例 1: 递增线性退化数据

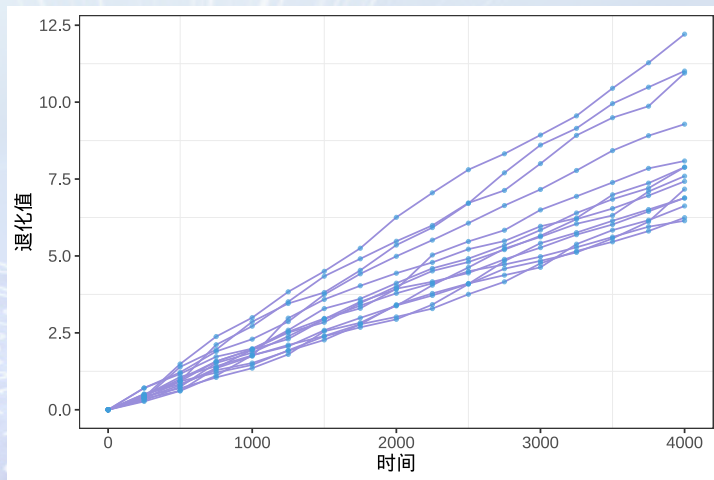


图 1.9: 激光工作电流的退化路径

示例 2: 递增非线性退化数据

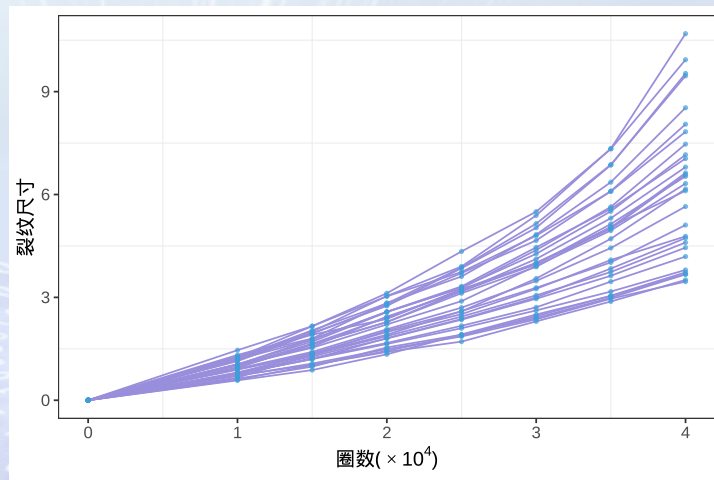


图 1.10: 铝合金裂纹退化数据

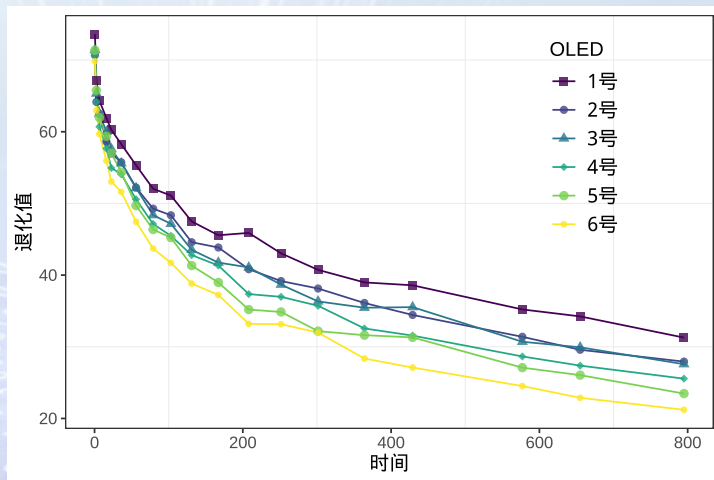


图 1.11: 6 个 OLED 的退化数据

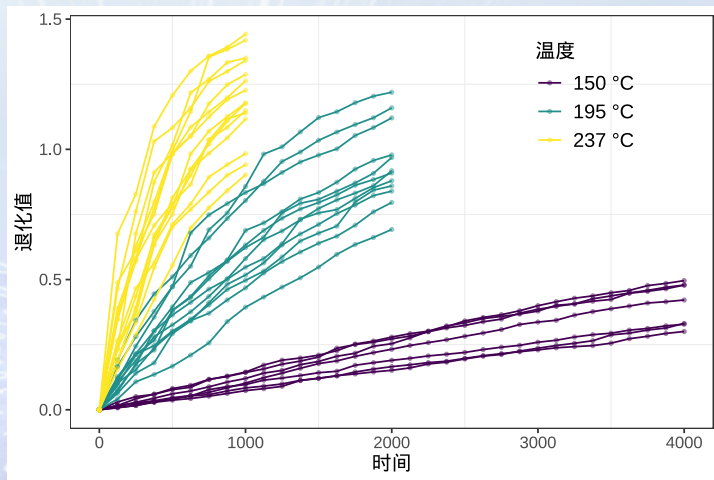


图 1.12: 3 组锂电池的容量退化数据

示例 5: 有变点的退化数据

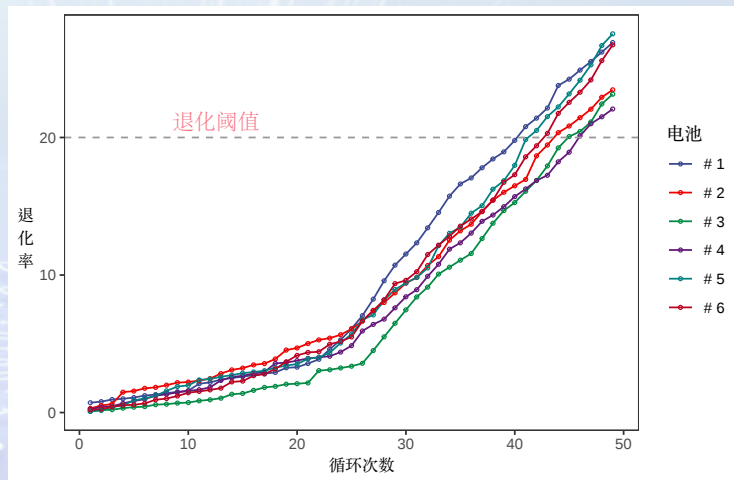


图 1.13: 6 个锂电池的容量退化数据

不能单独 (独立) 分析?

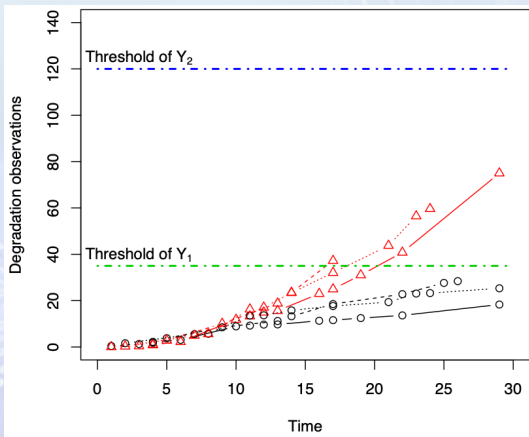


图 1.14: 重型机床的二个 PC 退化数据.

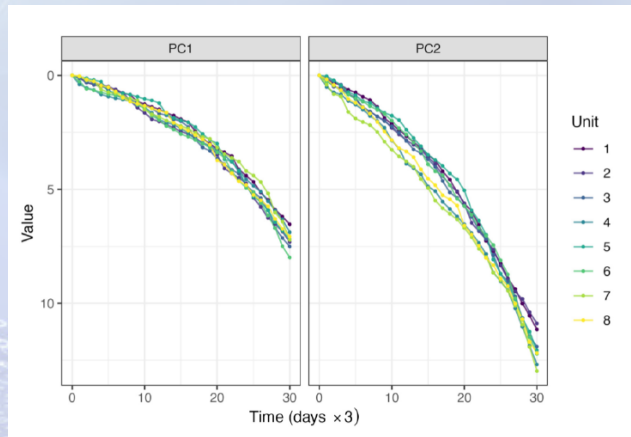


图 1.15: 永磁制动器二个 PC 退化数据.

☞ 退化形态/模型的确定。在此仅考虑递增的退化模型

☞ 异质性参数模型

☞ 加速模型

☞ 统计推断:

❶ 参数估计

❷ 寿命 T 的分布

❸ MTBF

❹ RUL: 剩余寿命分布

❺ 维修/替换策略

☞ 数据驱动的 ML/DL 建模: 从环境变量中提取特征

☞ 计算加速: INLA, VB, ABC

1 引言

2 基本退化模型

3 高级退化模型

4 总结

1. 一般路径模型 (general path model) (Lu & Meeker, 1993; Hong 等, 2015)

$$Y(t) = D(t|\beta, b) + \epsilon.$$

2. 随机过程模型 (stochastic model)

$$Y(t) = X(t) + \epsilon.$$

👉 持续的热点: google scholar 显示有几百万篇文章, 2025 年 1 万多篇的论文.

👉 随机退化过程模型, 如: 维纳过程 (Liao and Tseng, 2006), 伽马过程 (Park & Padgett, 2005), 逆高斯过程 (Wang & Xu, 2010), 指数扩散过程 (Zhou & Xu, 2019), Ornstein-Uhlenbeck 过程, 等.

👉 综述论文: Ye & Xie (2015), Zhang 等 (2018).

1 引言

2 基本退化模型

- 维纳退化过程
- 伽马退化过程
- 逆高斯退化过程
- 指数分散退化过程

3 高级退化模型

4 总结

标准维纳过程

- ① $B(0) = 0$;
- ② $B(t)$ 有平稳独立增量;
- ③ 对任意 $t, s \geq 0$, $B(t+s) - B(s) \sim N(0, t^2)$;
- ④ $B(t)$ 关于 t 是连续函数,

带时间漂移的线性维纳过程

$$Y(t) = \beta t + \sigma B(t), \quad (2.1)$$

其中参数 β 和 σ 分别为漂移参数和扩散参数.

- 👉 退化增量的分布: $\Delta Y(t) = Y(t + \Delta t) - Y(t) \sim N(\beta \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$;
- 👉 寿命的分布: $T \sim IG(\omega/\beta, \omega^2/\sigma^2)$; $E(T) = \omega/\beta$.

带时间漂移的非线性维纳过程 (Whitmore, 1995)

$$Y(t) = \beta \Lambda(t) + \sigma B(\Lambda(t)), \quad (2.2)$$

其中 $\Lambda(t)$ 为时间尺度函数, 用于描述性能退化可能随时间呈现非线性趋势, 例如 $\Lambda(t) = t^\alpha$ 能够灵活地描述线性、凹形或凸形的退化路径.

👉 退化增量的分布:

$$\Delta Y(t) \sim N(\beta \Delta \Lambda(t), \sigma^2 \Delta \Lambda(t)),$$

其中 $\Delta \Lambda(t) = \Lambda(t + \Delta(t)) - \Lambda(t)$.

广义维纳过程

$$M_0 : Y(t) = \beta \Lambda(t) + \sigma(\beta) B(\tau(t)), \quad (2.3)$$

其中 $\Lambda(t) = \Lambda(t; r)$ 和 $\tau(t) = \tau(t; b)$ 为两个单调递增的时间变换函数, $\Lambda(0) = \tau(0) = 0$, $B(\cdot)$ 为标准维纳过程 (布朗运动).

👉 退化增量的分布:

$$\Delta Y(t) \sim N(\beta \Delta \Lambda(t), \sigma^2(\beta) \Delta \tau(t)),$$

其中 $\Delta \Lambda(t) = \Lambda(t + \Delta(t)) - \Lambda(t)$, $\Delta \tau(t) = \tau(t + \Delta(t)) - \tau(t)$.

1 传统维纳退化模型 (TWM) (当 $\sigma(\beta) = \sigma$ 时)

- ▢ $\Lambda(t) = \tau(t) = t$: 线性漂移的退化过程
- ▢ $\Lambda(t) = \tau(t) = \Lambda(t; r)$: 非线性漂移的退化过程
- ▢ $\Lambda(t) = \Lambda(t; r), \tau(t) = t$: 非线性 TWM 的简化形式

2 广义维纳退化模型-类型 I (NWM-I) (当 $\sigma(\beta) = \beta\kappa$ 时)

- ▢ $\Lambda(t) = \tau(t) = \Lambda(t; r)$: 非线性 NWM-I (Ye, Chen 等, 2015)
- ▢ $\Lambda(t) = \Lambda(t; r), \tau(t) = t$: NWM-I (Wang 等, 2019)

3 广义维纳退化模型-类型 II (NWM-II) (当 $\sigma(\beta) = \beta^{1/2}\kappa$ 时)

- ▢ $\Lambda(t) = \tau(t) = \Lambda(t; r)$: 非线性 NWM-II (Zhai, Chen 等, 2018)
- ▢ $\Lambda(t) = \Lambda(t; r), \tau(t) = t$: NWM-II

4 NWM-II 的优点:

- ▢ 具有随时间变化的均值-方差比, 退化率与波动率相依
- ▢ 数学性质更好

👉 模型的两部分:

- 1 退化增量 $\Delta Y(t)$ 的分布 (似然函数)
- 2 异质性参数及其分布, 例如 $\beta_i \sim \text{IG}(a, b)$

👉 两大主流方法:

- 1 基于 EM 的极大似然估计, 其中 β_i 视为隐变量 (数据扩充)
- 2 基于 MCMC 的分层贝叶斯估计, 其中 β_i 视为一层先验, 对于其中的超参数及模型的其他参数再给出先验。

👉 算法依赖于:

- 1 EM 算法或 MCMC 算法参数初始值的确定
- 2 模型选择: $\Lambda(t), \tau(t)$ 的确定

参见徐安察, 汤银才, 庄亮亮 (2026, 第二章) 及相关参考文献.

1 引言

2 基本退化模型

- 维纳退化过程
- 伽马退化过程
- 逆高斯退化过程
- 指数分散退化过程

3 高级退化模型

4 总结

$\{Y(t), t \geq 0\}$ 满足以下性质:

- ❶ $Y(0) = 0$;
- ❷ $\{Y(t), t \geq 0\}$ 具有平稳和独立增量;
- ❸ 退化增量的分布: $\Delta Y_t = Y(t+s) - Y(s) \sim Ga(\alpha t, \beta)$

👉 寿命分布:

$$T \sim F_T(t \mid \alpha, \beta) = P(T < t) = P(Y(t) > \omega) = \frac{\Psi(\beta\omega, \alpha t)}{\Gamma(\alpha t)}, \quad (2.4)$$

其中 $\Psi(k, \alpha)$ 是上不完全伽马函数.

👉 近似寿命分布 (Park & Padgett, 2005): $T \sim BS(\alpha^*, \beta^*)$, $MTTF = \beta^*(1 + \alpha^{*2}/2)$,

$$F_T(t \mid \alpha, \beta) = \Phi \left(\frac{1}{\alpha^*} \left[\sqrt{\frac{t}{\beta^*}} - \sqrt{\frac{\beta^*}{t}} \right] \right), \text{ 其中 } \alpha^* = \sqrt{\frac{1}{\beta\omega}}, \beta^* = \frac{\beta\omega}{\alpha}. \quad (2.5)$$

➡ 异质性参数: β

➡ 数据: $y_{ij} = Y_{ij} - Y_{ij-1} \sim Ga(\alpha t_j, \beta_i) (Y_{i0} = 0) \Rightarrow$ 似然函数 $L(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n)$

➡ $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n$ 的**共轭先验** (在 $t_{i,j} = T_{i,j} - T_{i,j-1} = l$ 下)

$$\pi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n) = C \frac{(\bar{\beta}_g \omega)^{\delta_1 l \alpha}}{[\Gamma(l\alpha)]^{\delta_1}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \delta_2 \lambda_i \beta_i \right\}, \quad (2.6)$$

其中 C 是正则化常数, $\delta_1, \delta_2, \omega$ 和 λ_i 是非负超参数.

➡ 给定 α 时, β_i 的条件先验分布为 $Ga(1 + \delta_1 l \alpha / n, \delta_2 \lambda_i)$, α 的边缘分布近似为伽马分布. 因此, $\pi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n)$ 近似的伽马-多元伽马分布.

➡ 由共轭性, $\pi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n)$ 的后验分布也近似为伽马-多元伽马分布.

➡ 更一般情形及详细过程, 见徐安察, 汤银才, 庄亮亮 (2026, 第 3.2 节).

- 👉 定义: 假设在时间 t_m 监测到第 i 个产品的退化轨迹 $\{Y_{i1}, \dots, Y_{im}\}$ 均满足 $Y_{ij} < \omega$ (其中 ω 为失效阈值), 则其在时间 t_m 的 RUL 定义为

$$Z_{it_m} = \inf\{z : Y_i(z + t_m) > \omega | Y_{ij} < \omega, j = 1, \dots, m\}.$$

- 👉 分布函数为 Z_{it_m} 的 CDF 为

$$F_{Z_{it_m}}(z | \alpha, \beta_i) = \frac{\Psi(\beta(\omega - Y_{im}), \alpha z)}{\Gamma(\alpha z)}.$$

- 👉 近似 RUL 分布 (Park & Padgett, 2005): $Z_{it_m} \sim BS(\alpha_{im}^*, \beta_{im}^*)$, 其中

$$\alpha_{im}^* = \sqrt{\frac{1}{\beta_i(\omega - Y_{im})}}, \quad \beta_{im}^* = \frac{\beta_i(\omega - Y_{im})}{\alpha}.$$

👉 定义: $\{Y(t), t \geq 0\}$ 满足

- ❶ $Y(0) = 0$;
- ❷ $\{Y(t), t \geq 0\}$ 具有平稳和独立增量;
- ❸ 退化增量的分布: $\Delta Y_t = Y(t+s) - Y(s) \sim Ga(\alpha t, \eta/\alpha)$

👉 $E(Y(t)) = \eta t$, $\text{Var}(Y(t)) = \eta^2 t / \alpha$, $CV = 1/\sqrt{\alpha t}$

👉 异质性参数: $\eta \sim LN(\mu, \sigma^2)$

👉 统计推断: 变分贝叶斯 (周世荣等, IEEE Tr. R, 2023). 使用易处理的代理分布来近似复杂的 EM 算法或贝叶斯后验计算中低效的计算.

👉 相比经典伽马退化过程模型的好处

- 🔺 参数解释性更好: 参数 η 表示平均退化速率 (或斜率), 而参数 α 则量化总体样本退化过程的波动程度.
- 🔺 便于 VB 的实现

1 引言

2 基本退化模型

- 维纳退化过程
- 伽马退化过程
- 逆高斯退化过程
- 指数分散退化过程

3 高级退化模型

4 总结

☞ 定义: $\{Y(t), t \geq 0\}$ 满足

- ❶ $Y(0) = 0$;
- ❷ $\{Y(t), t \geq 0\}$ 具有平稳和独立增量;
- ❸ 退化增量的分布: $\Delta Y_t = Y(t+s) - Y(s) \sim IG(\alpha t, \lambda t^2)$

☞ $E[Y(t)] = \alpha t, \text{Var}[Y(t)] = \alpha^3 t / \lambda$.

☞ 异质性参数: $v = 1/\alpha$

☞ 参数解释性更好:

- ▮ α 表示退化速率, 直接反映系统性能随时间推移的衰减速度
- ▮ λ 作为扩散系数, 衡量退化过程的波动程度, 表征退化路径的随机性和不确定性.

☞ 寿命分布 (其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的 CDF)

$$F(t) = \Phi \left[\sqrt{\frac{\lambda}{\omega}} \left(t - \frac{\omega}{\alpha} \right) \right] - \exp \left(\frac{2\lambda t}{\alpha} \right) \Phi \left[-\sqrt{\frac{\lambda}{\omega}} \left(\frac{\omega}{\alpha} + t \right) \right], \quad (2.7)$$

➡ 退化增量的分布:

$$\Delta Y_t = Y(t+s) - Y(s) \sim IG(\Lambda(t, \beta)/v, \lambda \Lambda(t, \beta)^2),$$

其中 $\Lambda(t, \beta)$ 为时间尺度变换函数.

➡ 具有子总体异质性的 IG 退化模型为

$$\begin{aligned} Y(t) \mid \nu &\sim IG(\Lambda(t, \beta)/\nu, \lambda \Lambda(t, \beta)^2), \\ \nu &\sim \sum_{k=1}^K p_k N(\mu_k, \sigma_k^2/\lambda), \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 p_k 为第 k 个子总体的比例, $N(\cdot)$ 表示高斯分布, K 为子群体总数.

➡ 统计推断: EM 算法. 参见徐安察, 汤银才, 庄亮亮 (2026, 第 4.2 节)

1 引言

2 基本退化模型

- 维纳退化过程
- 伽马退化过程
- 逆高斯退化过程
- 指数分散退化过程

3 高级退化模型

4 总结

☞ 定义: $\{Y(t), t \geq 0\}$ 满足

- 1 $Y(0) = 0$;
- 2 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 具有独立增量性;
- 3 $\Delta Y_t = Y(t+s) - Y(s) \sim ED(\mu\Lambda(t; \alpha), \lambda)$, 其密度函数为

$$f(\Delta y; \theta, \lambda, \alpha) = c(\Delta y \mid \Delta\Lambda(t; \alpha), \lambda) \exp \{ \lambda [\Delta y \theta - \Delta\Lambda(t; \alpha) \kappa(\theta)] \}, \quad (2.9)$$

其中 $\Lambda(\cdot)$ 是时间 t 的单调递增函数, α 为未知参数, $c(\cdot)$ 是正则化常数; $\kappa(\cdot)$ 是累积函数 (cumulant function), 其导数决定了 ED 分布的连续累积量.

☞ μ 为漂移参数, λ 为扩散参数. μ 是 θ 的函数, 两者存在 1-1 对应关系 (见(44)).

☞ 若 $\Lambda(t; \alpha) = t$, ED 过程可简化为 Tseng 等 (2016) 提出的平稳 ED 退化模型.

☞ $E(Y(t)) = \mu\Lambda(t; \alpha)$, $\text{Var}(Y(t)) = V(\mu)\Lambda(t; \alpha)/\lambda$.

☞ 称 $V(\mu)$ 为方差函数.

👉 Tweedie 模型 (Tweedie, 1984): 若方差函数 $V(\mu)$ 具有形式

$$V(\mu) = \mu^d, d \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty), \quad (2.10)$$

👉 特例:

- ① $d = 0$: 维纳过程
- ② $d = 2$: 伽马过程
- ③ $d = 3$: IG 过程
- ④ $1 < d < 2$: 复合泊松过程

👉 式(2.9)中 $\kappa(\theta)$ 的表示 (Dunn 等, 2005)

$$\theta = \begin{cases} \frac{\mu^{1-d}}{1-d}, & d \neq 1, \\ \log \mu, & d = 1, \end{cases} \quad \kappa(\theta) = \begin{cases} \frac{\mu^{2-d}}{2-d}, & d \neq 2, \\ \log \mu, & d = 2. \end{cases} = \begin{cases} \exp(\theta), & d = 1, \\ -\log(-\theta), & d = 2, \\ \frac{[(1-d)\theta]^{(2-d)/(1-d)}}{2-d}, & d \neq 1, 2. \end{cases}$$

表 2.1: 当 $\mu = 1$ 时 d 与 θ 及 $\kappa(\theta)$ 的关系.

d	随机过程	θ	$\kappa(\theta)$
0	维纳过程	1	$\theta^2/2$
1	泊松过程	0	$\exp(\theta)$
(1, 2)	复合泊松过程	1	$[(1-d)\theta]^{(2-d)/(1-d)}$
		$\frac{1}{1-d}$	$2-d$
2	伽马过程	-1	$-\log(-\theta)$
3	逆高斯过程	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{-2\theta}$

参数 d 的重要性: 离散程度与 μ 的关系

- 👉 参数 d 不仅决定方差函数的形式, 还反映了数据的离散程度.
- 👉 当 $d = 0$ 时, $\text{Var}(Y(t)) = \Lambda(t; \alpha)/\lambda$, 方差与 μ 无关;
- 👉 当 $d \geq 1$ 时, 方差与 μ 相关: μ 越大, 方差越大.
- 👉 由 $V(\mu) = \mu^d$ 知, 由伽马过程 ($d = 2$) 或 IG 过程 ($d = 3$) 生成的退化数据相比于维纳过程 ($d = 0$) 会更分散.

- 👉 难点: $c(\cdot), \kappa(\cdot)$ 仅在某些特殊 d 值下才有解析形式; 通常需要近似.
- 👉 退化增量的分布 (Jørgensen, 1986, 1987, 1998, 1998)

$$f(\Delta y_j; \Theta) = a(\Delta y_j \mid \Delta \Lambda(t_j; \alpha); \lambda) \exp \left\{ -\frac{\lambda \Delta \Lambda(t_j; \alpha)}{2} D(\Delta y_j \mid \Delta \Lambda(t_j; \alpha); \mu) \right\},$$

其中 $\Theta = (\lambda, d, \mu, \alpha)$, $D(\Delta y_j \mid \Delta \Lambda(t_j; \alpha); \mu)$ 为单位偏差, 见表2.2, $a(\Delta y_j \mid \Delta \Lambda(t_j; \alpha); \lambda)$ 可用鞍点近似表达为 (Jørgensen, 1998)

$$a(\Delta y_j \mid \Delta \Lambda(t_j; \alpha); \lambda) \approx \{2\pi\lambda^{-1}\Delta\Lambda(t_j; \alpha)V(\Delta y_j/\Delta\Lambda(t_j; \alpha))\}^{-1/2}.$$

👉 可靠度函数 $R(t; \Theta)$

- 🔺 当 $d = 0$ 时, ED 模型简化为维纳过程, 此时具有解析形式 (Xu, Shen 等, 2018);
- 🔺 当 $d \geq 1$ 时, 可靠性函数可表示为 $R_{ED}(\omega; t, \Theta)$, 其中 $R_{ED}(\cdot)$ 表示均值为 $\mu\Lambda(t; \alpha)$ 、方差为 $\mu^d\Lambda(t; \alpha)/\lambda$ 的 ED 分布的可靠性函数.
- 🔺 当 $d < 0$ 时, 直接计算 $R(t; \Theta)$ 较为困难, 此时可采用蒙特卡洛方法.

表 2.2: Tweedie 模型的单位偏差 $D(\Delta y_j \mid \Delta \Lambda(t_j; \alpha); \mu)$.

随机过程	单位偏差
泊松过程 ($d = 1$)	$2 \left\{ \frac{y}{\Lambda(t; \alpha)} \log \left(\frac{y}{\Lambda(t; \alpha) \mu} \right) - \left(\frac{y}{\Lambda(t; \alpha)} - \mu \right) \right\}$
伽马过程 ($d = 2$)	$2 \left\{ \frac{y}{\Lambda(t; \alpha)} \log \left(\frac{y}{\Lambda(t; \alpha) \mu} \right) + \frac{y}{\Lambda(t; \alpha) \mu} - 1 \right\}$
其他过程 ($d \neq 1, 2$)	$2 \left\{ \frac{(y/\Lambda(t; \alpha))^{2-d}}{(1-d)(2-d)} - \frac{y\mu^{1-d}}{\Lambda(t; \alpha)(1-d)} + \frac{\mu^{2-d}}{2-d} \right\}$

👉 异质性参数: $\mu \sim TN(\eta, 1/\tau^2)$ (截断正态分布), 其 PDF 为

$$f_{TN}(\mu) = \frac{\tau\phi(\tau(\mu - \eta))}{1 - \Phi(-\tau\eta)}, \quad \mu > 0, \tau > 0,$$

👉 异质性参数: $\lambda \sim Ga(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$, 其 PDF 为

$$f_{Ga}(\lambda) = \frac{\beta_\lambda^{\alpha_\lambda}}{\Gamma(\alpha_\lambda)} \lambda^{\alpha_\lambda - 1} \exp\{-\beta_\lambda \lambda\}.$$

👉 异质性参数:

$$\begin{aligned} \mu \mid \lambda &\sim TN(\eta, \tau^{-2}/\lambda), \\ \lambda &\sim Ga(\alpha_\lambda, \beta_\lambda) \end{aligned} \quad (\text{伽马—截断正态混合分布}). \quad (2.11)$$

👉 统计推断: MLE/EM, 或 Bayes/MCMC. 见徐安察, 汤银才, 庄亮亮 (2026, 第 5.1 节).

1 引言

2 基本退化模型

3 高级退化模型

4 总结

- ❶ 带测量误差的退化模型
- ❷ 带变点的退化模型
- ❸ 加速退化模型
- ❹ 多元 (竞争) 退化模型
- ❺ 动态退化模型
- ❻ 其他复杂系统的退化模型

1 引言

2 基本退化模型

3 高级退化模型

- 带测量误差的退化模型
- 带变点的退化模型
- 加速退化模型
- 多元 (竞争) 退化模型
- 动态退化模型

4 总结

理论模型:

$$Y(t) = X(t) + \varepsilon$$

$$X(t) = \beta\Lambda(t) + \sigma\mathcal{B}(\Lambda(t)) \text{ (维纳退化过程)} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \gamma^2) \text{ (观测误差)}$$

数据模型:

$$Y(t_{i,j}) = X(t_{i,j}) + \varepsilon_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2)$$

其中

▮ $\varepsilon_{i,j}, j = 1, 2, \dots, m$ 独立同分布 (i.i.d.)

▮ ε 与 $X(t)$ 独立

▮ $Y(t_{i,\cdot})$ 与 $Y(t_{j,\cdot})$ ($i \neq j$) 独立

▮ 异质性参数: $\beta \sim N(\mu, \kappa^2)$

令 $\Delta Y_{i,1} = Y_{i,1}$, $\lambda_{i,1} = \Lambda_{i,1}$, $\Delta Y_{i,j} = Y_{i,j} - Y_{i,j-1}$, $\lambda_{i,j} = \Lambda_{i,j} - \Lambda_{i,j-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$), 则 $\Delta \mathbf{Y}_i = (\Delta Y_1, \dots, \Delta Y_m)'$ 服从多元正态分布 $\mathcal{N}(\beta \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$,

$$f(\Delta \mathbf{y}_i) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_i|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\Delta \mathbf{y}_i - \beta \boldsymbol{\lambda}_i)' \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\Delta \mathbf{y}_i - \beta \boldsymbol{\lambda}_i) \right]$$

其中 $\Delta \mathbf{y}_i = (\Delta y_{i,1}, \Delta y_{i,2}, \dots, \Delta y_{i,m})'$, $\boldsymbol{\lambda}_i = (\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,m})'$, $\boldsymbol{\Sigma}_i$ 是协方差矩阵, 其第 (g, k) 个元素为

$$\text{Cov}(\Delta Y_{i,g}, \Delta Y_{i,k} \mid \beta) = \begin{cases} \sigma^2 \lambda_{i,1} + \gamma^2, & g = k = 1; \\ \sigma^2 \lambda_{i,k} + 2\gamma^2, & g = k > 1; \\ -\gamma^2, & g = k + 1 \text{ 或 } g = k - 1; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

1 引言

2 基本退化模型

3 高级退化模型

- ☐ 带测量误差的退化模型
- ☒ 带变点的退化模型
- ☐ 加速退化模型
- ☐ 多元 (竞争) 退化模型
- ☐ 动态退化模型

4 总结

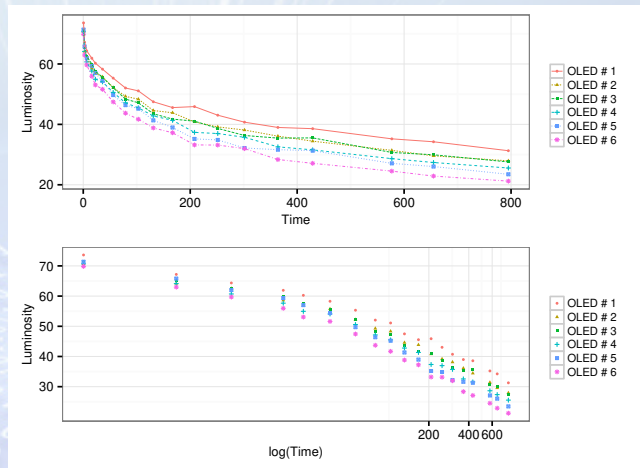


图 3.1: OLED 光度退化数据: 上方为时间轴, 下方为对数时间轴.

- 👉 早期工作: Tseng et al. (1995), Bae and Kvam (2006), Bae et al. (2008), Bae et al. (2015).
- 👉 维纳过程: Wang et al. (2018a, 2018b), Zhang et al. (2019), Li & Wang et al. (2023), etc.
- 👉 伽马退化过程: Ling et al. (2021), Wang, Tang, Chen (2022).
- 👉 IG 退化过程: Duan and Wang (2017), Ma et al. (2023).
- 👉 重参数化 IG 退化过程: Zhuang, Xu, Wang, Tang (2024, EJOR)

我们的工作

- 👉 Wang, Tang, Bae, He (2018, RESS) 针对 OLE 退化数据给出了带变点的维纳退化过程的贝叶斯推断方法.
- 👉 Wang, Tang, Bae, Xu (2018, IEEE Tr. R) 进一步考虑了带测量误差的情况.

➡ 考虑维纳退化模型

$$X(t) = m(t) + \sigma \mathcal{B}(t), \quad (3.3)$$

➡ 漂移参数 $m(t) = \beta t$ 上设定变点 τ :

$$(t; \beta^H, \beta^L, \tau) = \begin{cases} \beta^H t, & \text{若 } t \leq \tau \\ \beta^L(t - \tau) + \beta^H \tau, & \text{若 } t > \tau, \end{cases} \quad (3.4)$$

➡ 加上测量误差 $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \gamma^2)$:

$$Y(t) = X(t) + \epsilon, \quad (3.5)$$

➡ 异质性参数: β^H, β^L, τ

期望

$$\Delta m_{i,j} = \begin{cases} \beta_i^H \Delta t_{i,j}, & \text{若 } \tau_i \geq t_{i,j+1}, \\ \beta_i^H (\tau_i - t_{i,j}) + \beta_i^L (t_{i,j+1} - \tau_i), & \text{若 } t_{i,j} \leq \tau_i < t_{i,j+1}, \\ \beta_i^L \Delta t_{i,j}, & \text{若 } \tau_i < t_{i,j}, \end{cases}$$

期望 $\Delta Y_{i,g}$ 与 $\Delta Y_{i,k}$ 的协方差

$$\text{Cov}(\Delta Y_{i,g}, \Delta Y_{i,k}) = \begin{cases} \sigma^2 \Delta t_{i,1} + \gamma^2, & \text{若 } k = g = 1, \\ \sigma^2 \Delta t_{i,k} + 2\gamma^2, & \text{若 } k = g > 1, \\ -\gamma^2, & \text{若 } k = g + 1 \text{ 或 } g = k + 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

👉 $\beta^H \equiv (\beta_1^H, \dots, \beta_n^H).$

👉 $\beta^L \equiv (\beta_1^L, \dots, \beta_n^L).$

👉 $\tau \equiv (\tau_1, \dots, \tau_n).$

👉 $\theta = (\beta^H, \beta^L, \tau, \sigma^2, \gamma^2).$

$(\beta^H, \beta^L, \tau, \sigma^2, \gamma^2)$ 的似然函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n (2\pi)^{-\frac{n_i-1}{2}} |\Sigma_i|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(\Delta \mathbf{y}_i - \Delta \mathbf{m}_i)^\top \Sigma_i^{-1} (\Delta \mathbf{y}_i - \Delta \mathbf{m}_i)}{2} \right]. \quad (3.6)$$

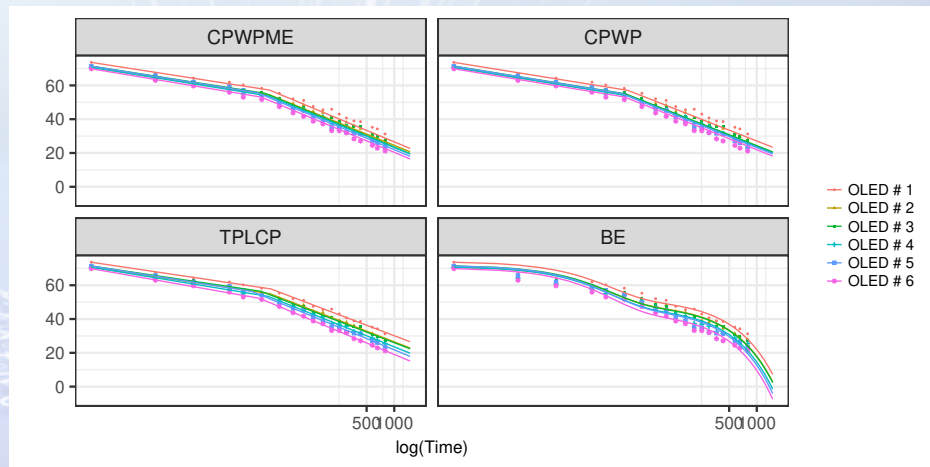


图 3.2: 四种不同方法的拟合结果, 横轴为对数时间.

准则: 均方预测误差 (MSPE, Mean squared prediction error)

$$\text{MSPE} = \sum_{j=1}^{n_i} (y_{i,j} - \hat{y}_{i,j})^2, \quad (3.7)$$

6 个退化数据用于拟合, 第 7 个退化数据用于预测.

表 3.1: 第 7 个 OLED 退化轨道的 MSPE.

Model	CPWPME	CPWP	TPLCP	BE
MSPE	360.04	406.04	436.29	678.53

1 引言

2 基本退化模型

3 高级退化模型

- ☐ 带测量误差的退化模型
- ☐ 带变点的退化模型
- ☒ 加速退化模型
- ☐ 多元 (竞争) 退化模型
- ☐ 动态退化模型

4 总结

- 在每个应力水平 $S_l, l = 1, \dots, r$, 下施加恒定应力, 并且在每个恒定应力下有 n_l 产品进行试验.
- 在每一个恒定应力水平 $S_l, l = 0, 1, \dots, r$, 下, 产品的退化量 $y_l(t)$ 是服从一个带漂移 $\eta(S_l)$ 和扩散参数 δ^2 的 Wiener 过程.

$$y_l(t) = \eta(S_l)t + \delta B(t),$$

- 参数 $\eta_l = \eta(S_l)$ 与应力 $S_l, l = 0, 1, \dots, r$, 之间的关系为如下

$$\ln(\eta_l) = a + b\varphi(S_l), \quad (3.8)$$

其中 a, b 是待估参数.

- 统计推断: Lim & Yum (2011), Guan, Tang, Xu(2016)

$r = 3$ 时典型的步加退化试验示意图.

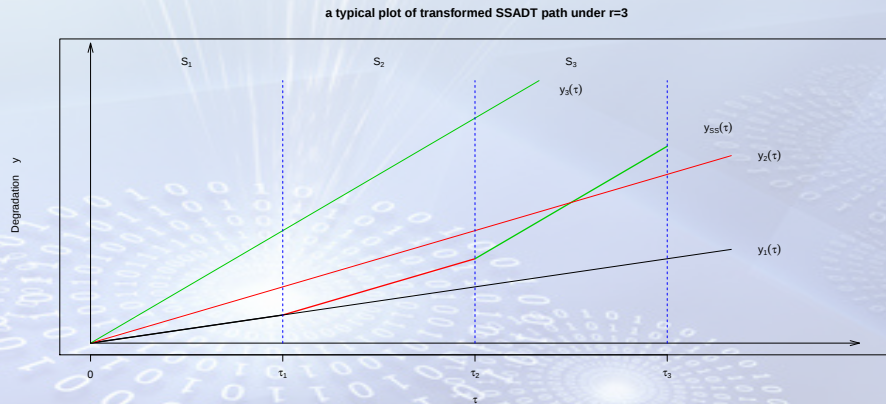


图 3.3: 步进应力退化试验

➡ 步进应力加速退化试验的应力 S 为如下

$$S = \begin{cases} S_1, & \text{若 } 0 \leq t < t_1; \\ \vdots & \vdots \\ S_r, & \text{若 } t_{r-1} \leq t < t_r. \end{cases}$$

➡ 每一个恒定应力水平 $S_l, l = 0, 1, \dots, r$, 下, 退化量 $y_l(t)$ 有

$$y_l(\tau) = \phi(y(t|S_l)) = \eta_l t + \delta B(t), l = 0, 1, \dots, r.$$

➡ 参数 $\eta_l = \eta(S_l)$ 与应力 $S_l, l = 0, 1, \dots, r$, 之间的关系为如下

$$\ln(\eta_l) = a + b\varphi(S_l), \quad (3.9)$$

👉 折算模型:

$$y_{SS}(t) = \begin{cases} \eta_1 t + \delta B(t), & t \in [0, t_1) \\ \eta_2 (t - t_1) + \eta_1 t_1 + \delta B(t), & t \in [t_1, t_2) \\ \vdots \\ \eta_l (t - t_{k-1}) + \sum_{i=1}^{k-1} \eta_i (t_i - t_{i-1}) + \delta B(t), & t \in [t_{k-1}, t_k) \end{cases}$$

👉 统计推断

- 🔴 早期见 Liao & Tseng (2006)
- 🔴 Guan, Tang, Xu (2016) 给出了客观贝叶斯推断
- 🔴 Zhou, Tang 等 (2026, RESS) 给出了一个基于 INLA 的加速贝叶斯推断算法

✎ 在恒定应力水平 $S_l, l = 0, 1, \dots, r$, 下, 产品的退化量 $y_l(t)$ 是服从 ED 过程或 TED 过程.

$$y_l \sim ED(\mu(S_l)\Lambda(t_l; \alpha), \lambda)$$

$$\text{或 } y_l \sim TED(\mu(S_l)\Lambda(t_l; \alpha), \lambda, d)$$

✎ 参数 $\eta_l = \eta(S_l)$ 与应力 $S_l, i = 0, 1, \dots, r$, 之间的关系为如下

$$\mu(S_l) = \mu \exp(\beta\phi(S_l)), \quad (3.10)$$

✎ Wang, Tang (2025, STARF) 进一步考虑更一般的情况:

$$\mu(S_l) = \mu \exp(\beta\phi(S_l)) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon \sim N(0, \delta^2) \quad (3.11)$$

✎ 异质性参数: μ .

1 引言

2 基本退化模型

3 高级退化模型

- ☐ 带测量误差的退化模型
- ☐ 带变点的退化模型
- ☐ 加速退化模型
- ☒ 多元 (竞争) 退化模型
- ☐ 动态退化模型

4 总结

示例 1: HMT 退化数据

- ✎ 为保持重型机床的高可用性与高效率，需实施预防性维护和系统健康管理.
- ✎ 重型机床 (HMT, heavy machine tool) 具有两个关键性能指标：定位精度和输出功率.
- ✎ 当定位精度超过阈值 $\omega_1 = 35$ 或输出功率超过阈值 $\omega_2 = 120$ 时，判定 HMT 发生故障.
- ✎ 目的:
 - ✎ 建立二元退化过程
 - ✎ 预测退化轨道上的缺失值

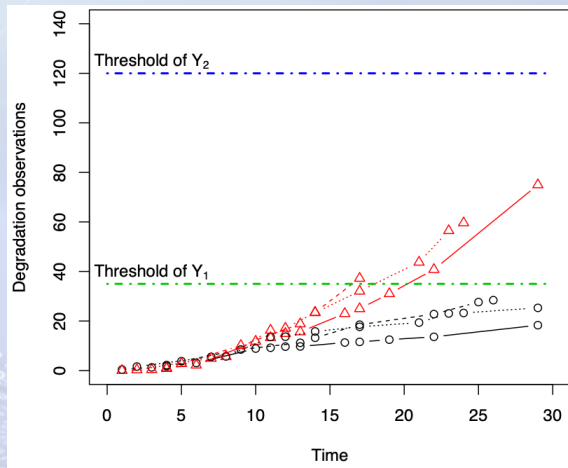


图 3.4: HMT 定位精度和输出功率的退化路径.

$$Y_s(t) = \alpha \beta_s h_s(t, \gamma_s) + \sigma_s B_s(h_s(t, \gamma_s)), \quad s = 1, 2, \quad (3.12)$$

☞ $h_s(t, \gamma_s)$ 递增, $h_s(0, \gamma_s) = 0$.

☞ $B_s(\cdot)$ 为标准维纳过程, $B_1(\cdot)$ 与 $B_2(\cdot)$ 独立.

☞ $\alpha \sim N(1, \delta^2)$, 既是个**异质性参数**(单元的个体效应), 又对二个 PC 的退化产生**共同影响**(共同效应).

$Y_1(t)$ 与 $Y_2(t)$ 的联合分布

$$(Y_1(t), Y_2(t))^T \sim \mathbf{N}_2(\mu_H, \Sigma), \quad (3.13)$$

其中 $\mu_H = (\beta_1 h_1(t, \gamma_1), \beta_2 h_2(t, \gamma_2))^T$,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 h_1(t, \gamma_1) + \delta^2 \beta_1^2 h_1^2(t, \gamma_1) & \delta^2 \beta_1 \beta_2 h_1(t, \gamma_1) h_2(t, \gamma_2) \\ \delta^2 \beta_1 \beta_2 h_1(t, \gamma_1) h_2(t, \gamma_2) & \sigma_2^2 h_2(t, \gamma_2) + \delta^2 \beta_2^2 h_2^2(t, \gamma_2) \end{pmatrix}.$$

☞ $T_s = \inf\{t : Y_s \geq \omega_s\}.$

☞ T_1 与 T_2 的联合 CDF 为

$$F(t_1, t_2) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$

其中 $A_l, l = 1, 2, 3, 4$ 可表示为易于计算的式子.

☞ 系统的寿命 $T = \min(T_1, T_2)$, 其可靠度函数为 $R(t) = F(t, t) + 1 - F_{T_1}(t) - F_{T_2}(t)$, 其中

$$F_{T_s}(t) = \Phi \left(\frac{\beta_s h_s(t, \gamma_s) - \omega_s}{\sqrt{\beta_s^2 \delta^2 (h_s(t, \gamma_s))^2 + \sigma_s^2 h_s(t, \gamma_s)}} \right) \\ + \exp \left\{ \frac{2\beta_s \omega_s}{\sigma_s^2} + \frac{2\beta_s^2 \delta^2 \omega_s^2}{\sigma_s^4} \right\} \Phi \left(- \frac{2\beta_s^2 \delta^2 \omega_s h_s(t, \gamma_s) + \sigma_s^2 (\beta_s h_s(t, \gamma_s) + \omega_s)}{\sigma_s^2 \sqrt{\beta_s^2 \delta^2 (h_s(t, \gamma_s))^2 + \sigma_s^2 h_s(t, \gamma_s)}} \right).$$

👉 第 s 个 PC 在时刻 t_k 的 RUL:

$$L_{t_k}^{(s)} = \inf\{l : Y_s(l + t_k) \geq \omega_s | Y_s(t_j) < \omega_s, j = 1, 2, \dots, k\}, s = 1, 2,$$

其中 $t_1, \dots, t_k$ 测量的时间.

👉 系统的 RUL:

$$L_{t_k} = \min(L_{t_k}^{(1)}, L_{t_k}^{(2)}).$$

👉 L_{t_k} 在时刻 l 的可靠度函数:

$$R_{L_{t_k}}(l) = F_{L_{t_k}}(l, l) + 1 - F_{L_{t_k}^{(1)}}(l) - F_{L_{t_k}^{(2)}}(l), \quad (3.14)$$

其中 $F_{L_{t_k}^{(s)}}(l)$ 是 $L_{t_k}^{(s)}$ 的 CDF, 可解析表示.

- ☞ 数据: $(y_{isj}, t_{isj}), i = 1, 2, \dots, n, s = 1, 2, j = 1, 2, \dots, m_{is}$
- ☞ $y_{is0} = 0, z_{isj} = y_{isj} - y_{is(j-1)}, \Lambda_{isj} = h_s(t_{isj}, \gamma_s) - h_s(t_{is(j-1)}, \gamma_s)$
- ☞ 贝叶斯模型 (第 i 个系统)

$$\begin{aligned}
 z_{isj} | \alpha_i &\sim N(\alpha_i \beta_s \Lambda_{isj}, \sigma_s^2 \Lambda_{isj}), \\
 \alpha_i &\sim N(1, \delta^2), \\
 \beta_s &\sim N(1, 10^3); 1/\sigma_s^2 \sim \mathbf{IG}(0.01, 0.01), \\
 1/\delta^2 &\sim \mathbf{IG}(0.01, 0.01); \gamma_s \sim \mathbf{IG}(0.01, 0.01).
 \end{aligned}$$

- ☞ 满条件后验分布: α_i, β_s 为正态; σ_s^2 为 IG; γ_s 的可解析表示为

$$\prod_{i=1}^n \prod_{s=1}^2 \prod_{j=1}^{m_{is}} \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{isj}}} \exp \left\{ -\frac{(z_{isj} - \alpha_{is} \Lambda_{isj})^2}{2\sigma_s^2 \Lambda_{isj}} \right\} (\gamma_s)^{c_s-1} \exp \{-d_s \gamma_s\}.$$

取 $h_1(t, \gamma_1) = t$, $h_2(t, \gamma_2) = t^{\gamma_2}$ (Peng et al., 2016).

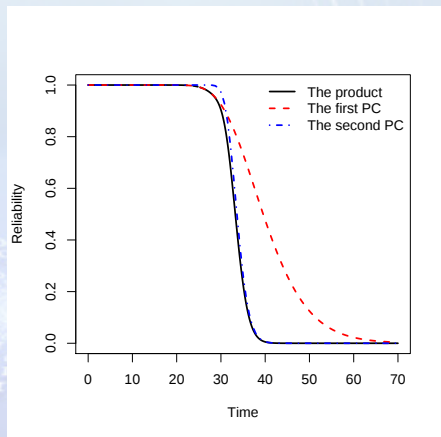


图 3.5: 系统及二个 PC 的可靠度.

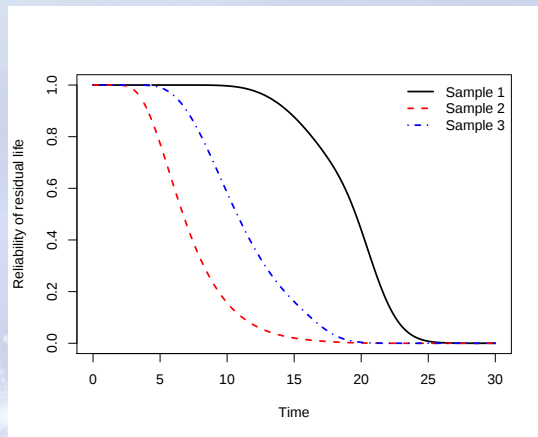


图 3.6: 三个系统 RUL 的可靠度.

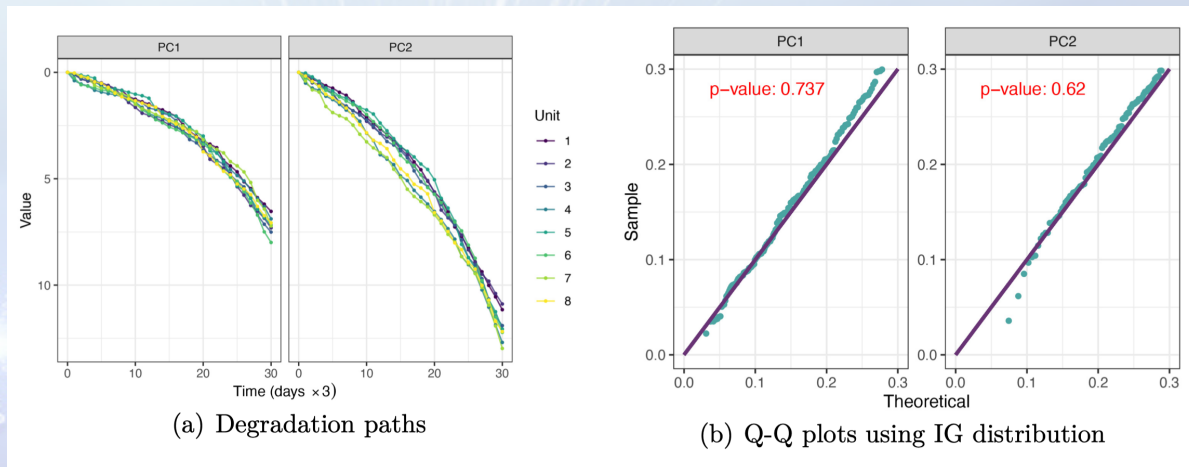


图 3.7: PMB 两类性能特征量 (PC1, PC2) 的退化路径及 IG 分布的 Q-Q 图.

Unit	1	2	3	4	5	6	7	8
Correlation	0.819	0.749	0.806	0.840	0.779	0.749	0.765	0.800

图 3.8: 8 个不同单元两类性能特征量之间的皮尔逊相关系数。

- 👉 目的: 建立多元重参数化 IG 退化过程模型
- 👉 估计方法: 基于 EM 的极大似然方法, 详见 (Xu 等, 2018, IEEE Tr. R)

1 引言

2 基本退化模型

3 高级退化模型

- 带测量误差的退化模型
- 带变点的退化模型
- 加速退化模型
- 多元 (竞争) 退化模型
- 动态退化模型

4 总结

☞ 部件之间的相关性建模方法

- ☞ 基于 Copula 构建多元分布 (Peng 等, 2016; Fang & Pan, 2021), 缺点: 解释较困难
- ☞ 基于多元分布 (Fang 等, 2022), 缺点: 验证较为复杂
- ☞ 基于共同效应模型 (Xu 等, 2018), 见上一小节, 缺点: 共同效应与时间无关, 无法反映环境的时变效应
- ☞ 基于脆弱因子 (Frailty, 不可观测的随机比例因子) 模型 (Hougaard, 1995; Liu, 2012). 缺点: 无法反映环境的时变效应

☞ 近期工作: Hong, Zhai, Wang, Ye (2019, IEEE TR. R.); Xu, Zhou, Tang (2021, IEEE TR. R.); Zhou et al. (2025, RESS); Zhengzhi Lin, Xiao Liu, Yisha Xiang, Yili Hong (2025, RESS).

☞ 目的: 用一个过程对时变的动态环境直接建模

✎ **动态环境**是影响系统寿命不可忽视的重要因素, 例如,

- ✎ 锂电池的寿命取决于充电和放电次数、使用习惯以及使用温度等;
- ✎ 车辆刹车片和轮胎的老化或磨损过程与道路条件、驾驶习惯和使用率相关.

✎ **动态因素**会导致部件的等效工作时间 $A(t)$ 呈现随机性, 进而**反映出动态环境对老化过程的累积影响**.

✎ 为描述这种累积效应, Nelson (1980) 提出了累积损伤模型, 经常用于加速寿命试验, 实现不同应力下寿命试验数据的折算.

✎ Hong 等 (2019) 基于此假设 $A(t)$ 是一个**随机时间尺度**, 并提出以下模型

$$F_i(t) = 1 - \exp\{-\eta_i A(t)\}, \quad (3.15)$$

其中 $\eta_i > 0$ 为基准故障率, $A(t)$ 则描述运行环境应力对时间尺度的影响.

✎ $F_i(t)$ 包含一些常见的寿命分布作为特例, 例如,

▢ 威布尔分布 ($A(t) = t^\alpha$)

▢ Gompertz 分布 ($A(t) = \exp(\alpha t) - 1$)

▢ Lomax 分布 ($A(t) = \log(1 + t/\alpha)$)

✎ $A(t)$ 可以解释为部件老化过程的度量 (Meeker, 2018, 2021).

✎ 例如, 在恒定环境下 (如恒加试验), $A(t)$ 通常被设定为确定性的时间尺度.

✎ 不足: 但实际情况中, 系统部件往往处于**动态环境**中, 其工作条件可能随着时间变化而显现出随机性.

✎ 修正: **用退化随机过程代替静态的时间尺度函数.**

▢ Hong 等 (2019): 通过复合泊松过程、和 IG 过程对动态环境 $Y(t)$ 进行建模, 实例中采用非齐次泊松过程代替 (近似) 复合泊松过程

▢ Xu 等 (2021): 采用 ED 过程捕捉系统各部件 (子系统) 动态环境的影响. 见徐安察, 汤银才, 庄亮亮 (2026, 第 5.2 节).

动态退化模型

$$\begin{aligned} T_i | Y(t) &\sim F_i(t | Y(t)), \\ Y(t) &\sim \mathcal{ED}(\mu\Lambda(t; \alpha), \lambda), \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中 T_i 表示部件寿命, $F_i(t | Y(t))$ 为其条件分布; $Y(t)$ 为反映时间尺度的随机过程, 服从 ED 过程 $\mathcal{ED}(\mu\Lambda(t; \alpha), \lambda)$.

 注:

- 随机过程 $Y(t), t \geq 0$ 应满足非递减性, 并且初始值 $Y(0) = 0$.
- 若方差函数 $V(\mu) = \mu^d$ 中的 $d \leq 0$ 时, ED 过程可能失去单调性, 为些限定 $d \geq 1$.
- 为避免模型 (3.16) 中的参数出现不可识别性, 进一步假设漂移参数 $\mu = 1$. 此时 d 与 θ 及 $\kappa(\theta)$ 之间的关系见表2.1.

结论 1: 二部件系统的联合生成函数

令 T_1 和 T_2 表示部件 1 和 2 的寿命. 设 t_1 和 t_2 为 T_1 和 T_2 的观测值. r_i 表示 t_i 按升序排列时第 i 个部件寿命的秩. 基于寿命的秩重排基准故障率为 $\eta_{(r_i)}$.

定理 3.1

若 T_i 的条件 CDF 定义为式 (3.15) ($i = 1, 2$), 且 $Y(t) \sim \mathcal{ED}(\Lambda(t; \alpha), \lambda)$, 则 T_1 和 T_2 的联合生存函数为

$$S(t_1, t_2) = \exp \left\{ \lambda \Lambda(t_{r_1}; \alpha) \left[\kappa \left(\theta - \frac{\eta_1 + \eta_2}{\lambda} \right) - \kappa \left(\theta - \frac{\eta_{(2)}}{\lambda} \right) \right] + \lambda \Lambda(t_{r_2}; \alpha) \left[\kappa \left(\theta - \frac{\eta_{(2)}}{\lambda} \right) - \kappa(\theta) \right] \right\}. \quad (3.17)$$

注 1: 当 $d = 1, \lambda = 1$ 时, 即为 Hong 等 (2019) 中的复合泊松过程的联合生成函数. 若 $1 < d < 2, d = 2$ 和 $d = 3$ 分别得到特殊的结果.

定义 3.2

当对于所有 t_1 和 t_2 , 满足

$$P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) \geq P(T_1 > t_1)P(T_2 > t_2),$$

则称两个随机变量 T_1 和 T_2 具有正象限相关 (positive quadrant dependent).

定理 3.3

在定理 3.1 的条件下, 部件寿命 T_1 和 T_2 具有正象限相关.

注 2: 定理 3.3 表明, 随机时间尺度 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 引入了部件寿命之间的相关性. 当 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 为确定性函数 $\Lambda(t; \alpha)$ (即 $\lambda \rightarrow \infty$) 时, 可以证明 T_1 和 T_2 独立.

注 3: 定理 3.3 的结果也适用于某些非单调随机过程.

定理 3.4

若 T_i 的条件 CDF 定义为式 (3.15) ($i = 1, \dots, K$), 且 $Y(t) \sim \mathcal{ED}(\Lambda(t; \alpha), \lambda)$, 那么 $(T_1, \dots, T_K)$ 的联合生存函数为

$$S(t_1, \dots, t_K) = \prod_{i=1}^K \exp \{ -\lambda \Lambda(t_{(r_i)}; \alpha) \nabla \kappa_i \},$$

其中 $\nabla \kappa_i = \kappa \left(\theta - \sum_{k=i+1}^K \eta(r_k) / \lambda \right) - \kappa \left(\theta - \sum_{k=i}^K \eta(r_k) / \lambda \right)$, 且 $\sum_{k=K+1}^K \eta(r_k) = 0$.

注 4: 定理 3.4 包括了 Hong 等 (2019) 的结果及一些非递减随机过程的结果.

注 5: 根据定理 3.3, 任意两个部件的寿命 T_i 和 T_j 之间具有正象限相关. 当随机时间尺度 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 退化为确定性函数 $\Lambda(t; \alpha)$ (即 $\lambda \rightarrow \infty$) 时, 联合生存函数退化为

$$S(t_1, \dots, t_K) = \prod_{i=1}^K \exp \{-\eta_i \Lambda(t_i; \alpha)\},$$

这表明部件寿命 $T_1, \dots, T_K$ 之间相互独立.

1 根据定理 3.4, K 部件**串联系统**的寿命 $T = \min\{T_1, \dots, T_K\}$ 的可靠度函数为

$$R_S(t) = P(T_1 > t, \dots, T_K > t) = \exp \left\{ -\lambda \Lambda(t; \alpha) \left[\kappa(\theta) - \kappa \left(\theta - \sum_{i=1}^K \eta_i / \lambda \right) \right] \right\}.$$

2 若 $T_1, \dots, T_K$ 之间相互**独立**, 则系统可靠度函数为

$$R_{IS}(t) = \exp \left\{ -\lambda \Lambda(t) \sum_{i=1}^K [\kappa(\theta) - \kappa(\theta - \eta_i / \lambda)] \right\}.$$

3 当 $Y(t)$ 退化为确定性函数 $\Lambda(t; \alpha)$ (即 $\lambda \rightarrow \infty$) 时, 系统可靠度可以简化为

$$R_{DS}(t) = \exp \left\{ -\Lambda(t; \alpha) \sum_{i=1}^K \eta_i \right\}.$$

定理 3.5 给出了 $R_S(t)$, $R_{IS}(t)$ 与 $R_{DS}(t)$ 之间的关系.

定理 3.5

$$R_{DS}(t) < R_{IS}(t) < R_S(t).$$

定理 3.5 揭示了两个重要结论:

- ❶ 如果未考虑动态环境的影响, 则会低估系统可靠性 ($R_{DS}(t) < R_{IS}(t)$).
- ❷ 忽略部件寿命之间的正相关性, 也会导致系统可靠性的低估 ($R_{IS}(t) < R_S(t)$).

注 6: 对于串并联系统, 可类似写出系统的可靠度.

1 引言

2 基本退化模型

3 高级退化模型

4 总结

退化过程模型

- 👉 四类基础退化模型
- 👉 五类高级退化模型
- 👉 主要推断方法 (根据异质性参数的分布)
 - 🔺 似然方法: 基于 EM
 - 🔺 贝叶斯方法; 基于 MCMC

更多退化过程及高效算法的研究

- 👉 多状态的退化过程 (已有很多结果)
- 👉 ADT 的最优设计 (已有很多结果)
- 👉 复杂环境变量引入退化过程
- 👉 深度学习或 AI 的使用

谢 谢

THANKS

yctang@stat.ecnu.edu.cn

<https://github.com/tangyc8866>